SERIE A

Hacia la MATEMATICA · 1

A. NEGRO · S. PEREZ CACHO

PROYECTO **MT-62** ALHAMBRA

COMITE EDITORIAL

Adolfo Negro

Jefe del Departamento de Matemáticas del C.N.S.R. de Madrid. Profesor del I.C.E. de la Universidad de Deusto

Fernando Marín Alonso

Jefe del Departamento de Física del C.N.S.R. de Madrid
Profesor del C.U. de Madrid

José M. Esteban

Profesor de Química de la E.T.S. de Ingenieros de Montes de la Universidad Politécnica de Madrid

Departamentos

Coordinación, control y seguimiento
Ciencias de la Naturaleza
Ciencias de la Educación
Lengua y Literatura
Socioantropología
Matemáticas
Química
Física

PROYECTO

mT62

ALHAMBRA

non Scholae sed vitae discere

HACIA LA MATEMATICA · 1

ADOLFO NEGRO

SANTIAGO PEREZ CACHO

Alhambra

Primera edición, 1975
Segunda edición, 1976
Primera reimpresión, 1977

EDITORIAL ALHAMBRA, S. A.
R. E. 182
Madrid-1. Claudio Coello, 76

Delegaciones:

Barcelona-8. Enrique Granados, 61
Bilbao-14. Doctor Albiñana, 12
La Coruña. Pasadizo de Pernas, 13
Málaga. La Regente, 5
Oviedo. Avda. del Cristo, 9
Sevilla-12. Reina Mercedes, 35
Valencia-3. Cabillers, 5

México

Editia Mexicana, S. A.
México-6, D.F. Lucerna, 84-105
Apartado 61-261

Rep. Argentina

Editorial Siluetas, S. A.
Buenos Aires-1201. Bartolomé Mitre, 3745/49

Perú

Editia Peruana, S. R. Ltda.
Lima: José Díaz, 208

n c 24010010

© Es propiedad de los autores.
Reservados todos los derechos.

ISBN 84-205-0558-7 (obra completa)

ISBN 84-205-0517-X (vol. 1)

Depósito legal: M. 20031 - 1977

Impreso en España - Printed in Spain

Selecciones Gráficas - Carretera de Irún, km. 11,500 - Madrid (1977)

Indice general

Capítulos *Páginas*

UNIDAD TEMATICA **1 - APLICACIONES**

1.1 Fundamentos ... 3

Producto cartesiano. Diagramas, 3. Correspondencias, 6. Aplicaciones, 8. Clases de aplicaciones, 10. Soluciones a los ejercicios del capítulo 1.1, 12.

1.2 Aplicaciones entre conjuntos finitos. Combinatoria ... 13

Variaciones con repetición, 13. Variaciones, 15. Permutaciones, 18. Aplicación característica de un subconjunto. Cardinal del conjunto potencia, 23. Combinaciones, 25. Números combinatorios. Propiedades, 30. Soluciones a los ejercicios del capítulo 1.2, 32.

1.3 Aplicaciones $N \to R$. Sucesiones ... 34

Sucesiones, 34. Progresiones aritméticas, 37. Progresiones geométricas, 43. Soluciones a los ejercicios del capítulo 1.3, 60.

1.4 Matemática comercial ... 63

Introducción, 63. Interés simple, 64. Interés compuesto, 66. Anualidades de capitalización, 70. Anualidades de amortización, 73. Soluciones a los ejercicios del capítulo 1.4, 75.

1.5 Ejercicios y problemas de recapitulación ... 82

1.6 Autoevaluación A-1 ... 85

UNIDAD TEMATICA **2 - POLINOMIOS**

2.1 El anillo de los polinomios en Q ... 93

Introducción, 93. Una letra polifacética: la x, 94. Monomios sobre el cuerpo racional Q, 94. Polinomios sobre el cuerpo racional Q, 96. Polinomio nulo, 97. Grado de un polinomio, 97. Relación de igualdad en el conjunto de los polinomios sobre Q, 97. El anillo abeliano cancelativo de los polinomios en Q, $[\mathcal{P}, +, \times]$, 98. Potencia de un binomio, 105. Polinomios y funciones polinómicas. Valor numérico, 111. Soluciones a los ejercicios del capítulo 2.1, 112.

Capítulos *Páginas*

2.2 División de polinomios ... 114

División de polinomios en Q, 114. Descomposición factorial de polinomios, 123. Polinomios iguales. Método de identificación de coeficientes, 127. Soluciones a los ejercicios del capítulo 2.2, 130.

2.3 Divisibilidad. Divisibilidad en Z y en $\mathcal{O}[x]$ ... 132

Concepto de ideal, 132. Ideales principales. Generador o base, 135. Adición de ideales. Máximo común divisor. Números primos entre sí, 136. Intersección de ideales. Mínimo común múltiplo. Números primos, 141. Determinación del D y del M de dos números o dos polinomios, 142. Aplicabilidad, 143. Soluciones a los ejercicios del capítulo 2.3, 147.

2.4 El cuerpo de fracciones de $\mathcal{O}[x]$ ... 148

Necesidad de ampliar $\mathcal{O}[x]$, 148. Simetrización del anillo $[\mathcal{O}[x], +, \times]$, 149. Adición en $\mathcal{F}[x]$, 151. Multiplicación en $\mathcal{F}[x]$, 152. Distributividad de la multiplicación respecto de la adición en $\mathcal{F}[x]$, 152. El cuerpo de fracciones de $\mathcal{O}[x]$, 152. Soluciones a los ejercicios del capítulo 2.4, 154.

2.5 Ejercicios y problemas de recapitulación ... 156

2.6 Autoevaluación A-2 ... 159

UNIDAD TEMATICA **3 - INTRODUCCION A R. FUNCIONES Y ECUACIONES**

3.1 Introducción al número real. Aproximación decimal. Radicales ... 167

Potenciación en Q, 167. Expresión decimal de un elemento de Q, 170. La recta racional, 171. El orden denso de los racionales y la recta racional llena de agujeros, 173. Irracionalidad de $\sqrt{2}$, 175. Puntos de la recta no racionales, 176. Aproximaciones decimales, 177. Operaciones con números reales. El cuerpo de los números reales, 179. Radicales, 180. Relación de equivalencia en el conjunto de los radicales, 182. Operaciones con radicales, 184. Potenciación de exponente racional, 186. Simplificación de un radical. Radicales semejantes, 187. Extensión radical de Q, 188. Soluciones a los ejercicios del capítulo 3.1, 189.

3.2 Funciones polinómicas de variable real. Representación gráfica ... 192

Introducción, 192. Función lineal y función afín, 193. Elementos de una función polinómica, 194. Aplicaciones y funciones, 195. Función constante. Función idéntica. Producto de funciones. Funciones lineales inversas, 199. Función cuadrática $y=x^2$, 204. Función $y=ax^2$, 206. Trinomio de segundo grado. Representación gráfica, 207. Signo del trinomio de segundo grado, 210. Valores extremos de un trinomio de segundo grado, 213. Funciones polinómicas de grado mayor que dos, 214. Soluciones a los ejercicios del capítulo 3.2, 216.

3.3 Ecuaciones ... 218

Ecuaciones, 218. Ecuaciones equivalentes, 220. Criterios de equivalencia, 220. Multiplicación de una ecuación por un número, 222. Grado de una ecuación entera, 223. Resolución de la ecuación de

Capítulos *Páginas*

primer grado, 224. Interpretación geométrica, 226. Ecuación de segundo grado, 226. Resolución de la ecuación completa de segundo grado, 228. Discriminante de una ecuación de segundo grado. Discusión, 229. Suma y producto de las raíces de una ecuación de segundo grado, 231. Determinación de la ecuación de segundo grado, conociendo la suma y el producto de sus raíces, 232. Ecuaciones reducibles a enteras, 234. Ecuaciones irracionales, 236. Soluciones a los ejercicios del capítulo 3.3, 237.

3.4 Sistemas de ecuaciones. Inecuaciones 239

Ecuación de primer grado con dos incógnitas, 239. Representación gráfica, 240. Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, 243. Métodos de resolución. Resolución gráfica, 243. Método de igualación, 245. Método de sustitución, 246. Método de reducción, 248. Discusión de un sistema de dos ecuaciones de primer grado, 250. Sistemas no lineales, 253. Sistemas lineales de tres o más ecuaciones con tres o más incógnitas, 255. Inecuaciones, 256. Inecuación de primer grado con una incógnita, 257. Sistemas de inecuaciones de primer grado con una incógnita, 259. Inecuación de primer grado con dos incógnitas, 261. Sistemas de inecuaciones con dos incógnitas, 264. Programación lineal, 265. Soluciones a los ejercicios del capítulo 3.4, 267.

3.5 Ejercicios y problemas de recapitulación 269

3.6 Autoevaluación A-3 272

UNIDAD TEMATICA **4 - COMPLEJOS**

4.1 Clases residuales polinómicas, módulo x^2+1 281

Introducción, 281. Relación de congruencia en $R[x]$, módulo x^2+1, 282. Representantes canónicos, 284. La biyección $C \to R \times R$, 287. Concepto de número complejo. Complejos iguales, 287. Operaciones en C, como pares de $R \times R$, 289. El cuerpo de los números complejos, 294. Soluciones a los ejercicios del capítulo 4.1, 296.

4.2 Los números reales y los números complejos 297

Isomorfismo de inmersión de R en C, 297. Forma binómica de un número complejo, 300. Resolución de la ecuación $x^2+1=0$, 301. Operaciones con complejos en forma binómica, 304. Complejos conjugados, 306. Automorfismo de conjugación en C, 307. Ecuaciones cuadráticas en C, 309. Representación gráfica de los números complejos. Afijos, 310. Soluciones a los ejercicios del capítulo 4.2, 313.

4.3 Ejercicios y problemas de recapitulación 314

4.4 Autoevaluación A-4 316

Capítulos *Páginas*

UNIDAD TEMATICA **5 - PROBABILIDAD Y ESTADISTICA**

5.1 Sucesos aleatorios ... 325

Sucesos deterministas y aleatorios, 325. Experiencia o prueba. Sucesos elementales. Espacio muestral, 326. Sucesos compuestos. Suceso seguro, 326. Conjunto-potencia de un espacio muestral, *H*, 327. Sucesos contrarios, 328. Unión de sucesos, 329. Intersección de sucesos. Sucesos compatibles, 330. Leyes del álgebra de sucesos, 332. Soluciones a los ejercicios del capítulo 5.1, 335.

5.2 Frecuencia y probabilidad ... 336

El ciclo de la Matemática de la aleatoriedad, 336. Frecuencia de un suceso, 337. Estabilización de las frecuencias. Ley del azar, 339. Propiedades de las frecuencias, 341. Concepto intuitivo de probabilidad. Postulado de indiferencia. Regla de Laplace, 342. Concepto axiomático de probabilidad, 345. Consecuencias inmediatas de los axiomas, 345. Teorema de la probabilidad total, 346. Teorema de la probabilidad compuesta, 348. Soluciones a los ejercicios del capítulo 5.2, 354.

5.3 Estadística ... 355

Génesis, definición, ramas y objetivos, 355. Estadística descriptiva. Terminología. Variable aleatoria. Muestra y población, 357. Variables cualitativas. Tablas y gráficos, 359. Variables cuantitativas. Tablas y gráficos, 365. Reducción de la información: estadísticos, 371. Estadísticos de centralización, 372. Estadísticos de dispersión, 376. Primera idea de la correlación, 379. Soluciones a los ejercicios del capítulo 5.3, 382.

5.4 Ejercicios y problemas de recapitulación ... 383

5.5 Autoevaluación A-5 ... 385

UNIDAD TEMATICA 1

APLICACIONES

1.1. Fundamentos

1. *Producto cartesiano. Diagramas*
2. *Correspondencias*
3. *Aplicaciones*
4. *Clases de aplicaciones*

1.2. Aplicaciones entre conjuntos finitos. Combinatoria

1. *Variaciones con repetición*
2. *Variaciones*
3. *Permutaciones*
4. *Aplicación característica de un subconjunto. Cardinal del conjunto potencia*
5. *Combinaciones*
6. *Números combinatorios. Propiedades*

1.3. Aplicaciones $N \to R$. Sucesiones

1. *Sucesiones*
2. *Progresiones aritméticas*
3. *Progresiones geométricas*

1.4. Matemática comercial

1. *Introducción*
2. *Interés simple*
3. *Interés compuesto*
4. *Anualidades de capitalización*
5. *Anualidades de amortización*

1.5. Ejercicios y problemas de recapitulación

1.6. Autoevaluación A-1

1.1

Fundamentos

1. PRODUCTO CARTESIANO. DIAGRAMAS

Sean los conjuntos

$$A=\{1,\ 2,\ 3\}$$
$$B=\{a,\ b\}.$$

Se denomina producto cartesiano de A y B a un conjunto denotado $A \times B$, cuyos elementos son todos los pares ordenados que se pueden formar, con *primera proyección* un elemento de A y con *segunda proyección* un elemento de B.

Simbólicamente:

$$A \times B=\{(a, b)/(a \in A) \wedge (b \in B)\}.$$

Ejemplo 1

El par $(2, a) \in A \times B$; el par $(a, 1) \notin A \times B$.

Ejercicio 1

Fórmense todos los pares de $A \times B$ que tienen por primera proyección 1.

Con primera proyección 2 se pueden formar otros dos pares, y con 3, otros dos. De modo que, como el cardinal de A es $n(A)=3$ y el de B, $n(B)=2$, resulta que el cardinal del producto cartesiano es

$$n(A \times B)=n(A) \times n(B)=3 \times 2=6.$$

Ejercicio 2

¿Cuántas sílabas de dos letras se pueden formar con las consonantes y las vocales, siendo siempre la segunda letra vocal?

Si el conjunto cartesiano es de un conjunto A por sí mismo, puede escribirse

$$A \times A = A^2$$

y, entonces, el cardinal del producto cartesiano A^2 es

$$n(A^2) = [n(A)]^2$$

Ejemplo 2

¿Cuántos números de dos cifras que no sean múltiplos de 10 existen? Tantos como pares tiene el cartesiano

$$A \times A = A^2$$

siendo

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\};$$

es decir, $9^2 = 81$ números.

Ejercicio 3

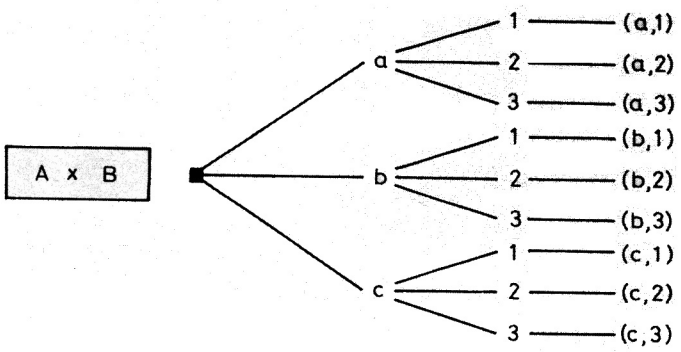
¿Cuántos números de dos cifras hay?

Una forma segura de escribir todos los pares de un producto cartesiano es construir un diagrama de árbol.

Ejemplo 3

Hállese, mediante un diagrama de árbol, el producto cartesiano de los conjuntos

$$A = \{a, b, c\} \quad \text{y} \quad B = \{1, 2, 3\}.$$



De este modo, ha resultado:

$$A \times B = \{(a, 1),\ (a, 2),\ (a, 3),\ (b, 1),\ (b, 2),\ (b, 3),\ (c, 1),\ (c, 2),\ (c, 3)\}$$

$$n(A \times B) = n(A) \times n(B) = 3 \times 3 = 9.$$

Se puede extender el concepto de «producto cartesiano» a más de dos conjuntos. En este caso, los elementos del cartesiano ya no son pares ordenados, sino

si son tres, se llaman ternas,
si son cuatro, cuaternas,
.....
.....
si son n, se llaman n-tuplas.

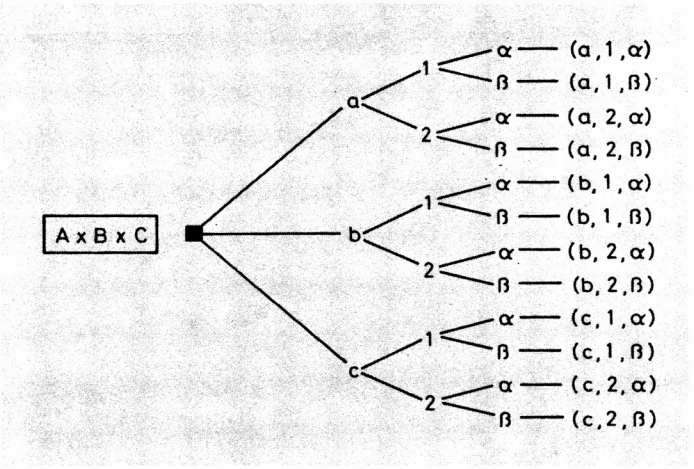
Así, se define:

$$A \times B \times C \times \ldots \times N = \{(a, b, c, \ldots, n)/(a \in A) \wedge (b \in B) \wedge \ldots \wedge (n \in N)\}$$

Ejemplo 4

Constrúyase el diagrama de árbol del cartesiano $A \times B \times C$, siendo

$$A = \{a, b, c\},\quad B = \{1, 2\},\quad C = \{\alpha, \beta\}$$



$$A \times B \times C = \{(a, 1, \alpha),\ (a, 1, \beta),\ (a, 2, \alpha),\ (a, 2, \beta),\ (b, 1, \alpha),\ (b, 1, \beta),\ (b, 2, \alpha),$$
$$(b, 2, \beta),\ (c, 1, \alpha),\ (c, 1, \beta),\ (c, 2, \alpha),\ (c, 2, \beta)\}$$
$$n(A \times B \times C) = n(A) \times n(B) \times n(C) = 3 \times 2 \times 2 = 12 \text{ ternas.}$$

Finalmente, recordemos el modo de representar un cartesiano, mediante un diagrama rectangular. Hagámoslo con el producto cartesiano del ejemplo 3.

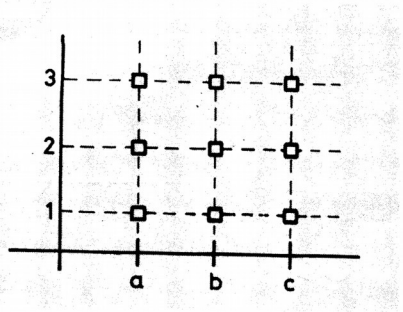


FIG. 1.1.

Cada nudo de la red representa uno de los nueve pares ordenados.

Aún se puede utilizar una representación de este tipo, si se trata de un cartesiano de tres conjuntos, resultando entonces una red cúbica.

La figura 1.2 representa el cartesiano del ejemplo 4. En ella, cada nudo de la red representa una de las doce ternas ordenadas.

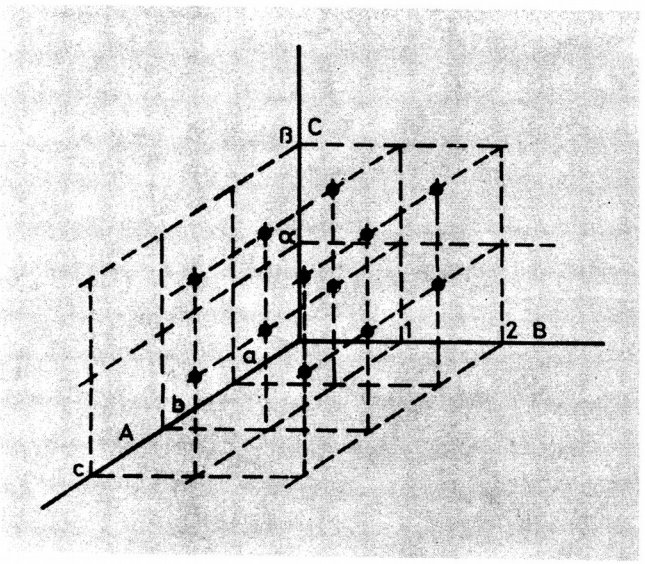


FIG. 1.2.

Ejercicio 4

¿Cuántos números pares de tres cifras pueden escribirse, mayores de 499, *de modo que su cifra central sea prima?*

2. CORRESPONDENCIAS

Correspondencia f entre dos conjuntos A y B es un subconjunto del cartesiano $A \times B$

$$(f: A \to B) \subseteq A \times B.$$

En una correspondencia $f: A \rightarrow B$,

— el primer factor del cartesiano $A \times B$ se denomina **conjunto inicial**;

— el segundo factor del cartesiano $A \times B$ recibe el nombre de **conjunto final**;

— f es el criterio que relaciona a los elementos de A con los de B;

— la primera proyección de los pares son los *antecedentes,* también llamados *antiimágenes*;

— la segunda proyección de los pares son las **imágenes**;

No todos los elementos de A tienen que ser antecedentes de algunos de B.

— el conjunto de A formado por todos los antecedentes se denomina **conjunto original**;

No todos los elementos de B han de ser imágenes de alguno de A.

— el subconjunto de B formado por todas las imágenes recibe el nombre de **conjunto imagen.**

Ejemplo 5

Sean los conjuntos $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $B=\{1, 4, 9, 81\}$, de la figura 1.3.

— El producto cartesiano $A \times B$ está formado por $6 \times 4 = 24$ pares ordenados.

— Se establece el criterio $f=$«ser cuadrado de».

— De los veinticuatro pares ordenados de $A \times B$, f escoge estos tres:

$$f: A \rightarrow B=\{(1, 1),\ (2, 4),\ (3, 9)\}.$$

La imagen de 1 es $f(1)=1$
de 2 es $f(2)=4$
de 3 es $f(3)=9$; y el antecedente de 9 es $f^{-1}(9)=3$
de 4 es $f^{-1}(4)=2$
de 1 es $f^{-1}(1)=1$.

Ejercicio 5

Entre el conjunto de las veintiséis letras del abecedario y el conjunto de los naturales se establece una correspondencia f, según este criterio:

f(***vocal***)$=$*cuadrado del orden de la letra anterior más uno*;

f (***consonante***) (*ordenadas dentro de cada intervalo entre dos vocales*) =

1.ª *diferencia de las imágenes de las vocales entre las que se encuentra;*

2.ª *decena inferior próxima a la imagen de la primera;*

3.ª *decena superior a la imagen de la segunda;*

4.ª *centena inferior próxima a la imagen de la tercera;*

5.ª *centena superior a la imagen de la cuarta;*

6.ª *centena superior a la imagen de la quinta.*

Usando como código la correspondencia establecida, descífrese la siguiente frase:

216-17-170-65-40-220-226-E-200-226-I.

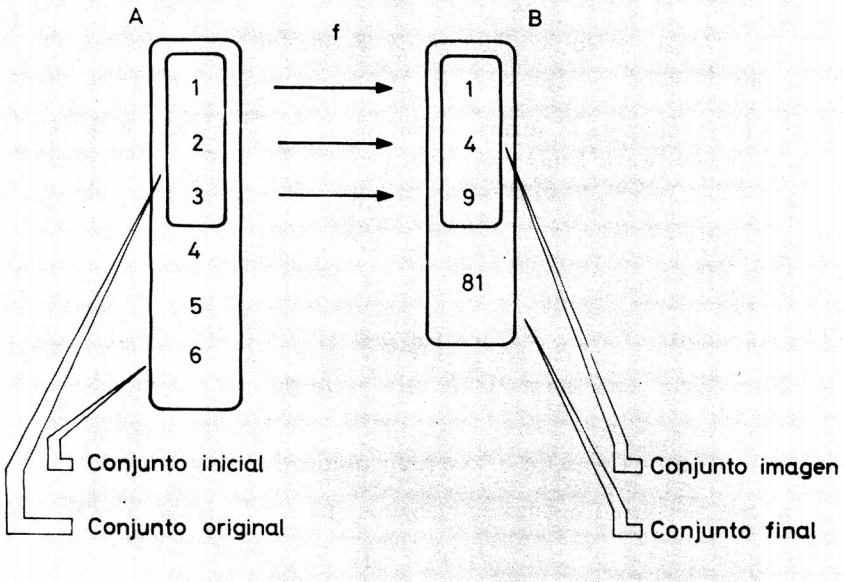


FIG. 1.3.

3. APLICACIONES

La más importante clase de correspondencias, con mucho, son las aplicaciones.

$$\left.\begin{array}{l} f: A \to B \text{ es} \\ \text{aplicación} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \forall a \in A,\ \exists^* b \in B / f(a) = b \quad ,$$

que se lee:

> La correspondencia $f: A \to B$ es una aplicación si, y solamente si, para todo elemento del conjunto inicial existe un solo elemento en el conjunto final tal que es su imagen.

Son dos los puntos de atención en esa definición:

1.º $\forall a \in A$ Todo elemento del inicial ha de tener imagen.
Consecuencia: conjunto inicial = conjunto original.

2.º $\exists^* b \in B$ Cada antecedente sólo tiene una imagen.

Ejemplo 6

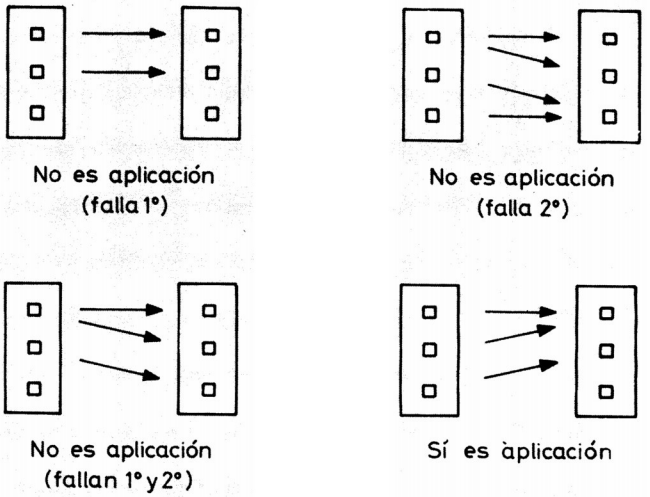
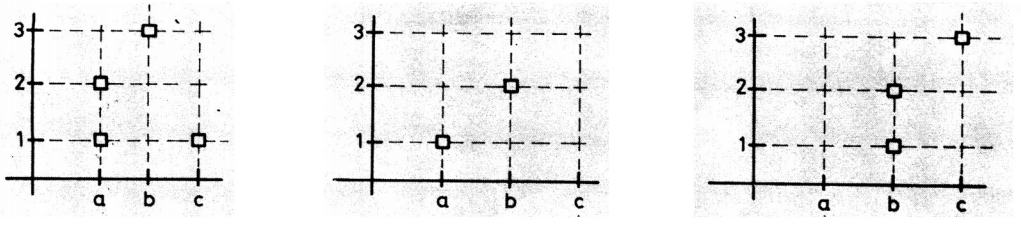


FIG. 1.4.

Ejercicio 6

Descúbrase si los pares representados forman o no una aplicación y dígase la razón.

FIG. 1.5.



4. CLASES DE APLICACIONES

Inyectivas. Una aplicación es inyectiva si toda imagen lo es de un solo antecedente.

Simbólicamente,

$$\left.\begin{array}{l}\text{La aplicación}\\ f: A \to B \text{ es}\\ \text{inyectiva}\end{array}\right\} \iff \forall f(a) \in B, \quad \exists^* a \in A.$$

Ejemplo 7

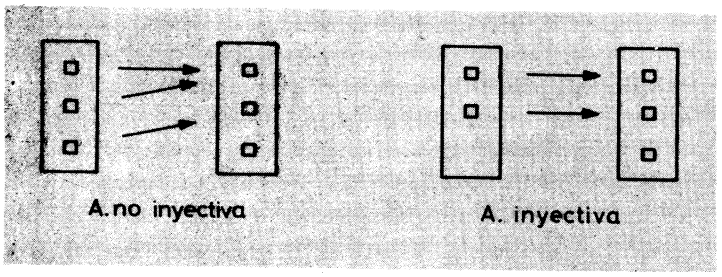


FIG. 1.6.

Ejercicio 7

Se establece la aplicación $f: Z \to Z$, cuyo criterio es $f =$ «elevar al cuadrado». ¿Cuál es el cuadrado del antecedente 3? ¿Cuál es el cuadrado del antecedente -3? Entonces, ¿cómo son $f(3)$ y $f(-3)$? La aplicación establecida, ¿es inyectiva?

Exhaustivas. Una aplicación es exhaustiva (también llamada sobreyectiva y suprayectiva) si todo elemento del conjunto final es imagen de algún antecedente. O, lo que es igual, si el conjunto final coincide con el conjunto imagen.

$$\left.\begin{array}{l}\text{La aplicación}\\ f: A \to B \text{ es}\\ \text{exhaustiva}\end{array}\right\} \iff \forall b \in B, \quad \exists a \in A / f(a) = b$$

Ejemplo 8

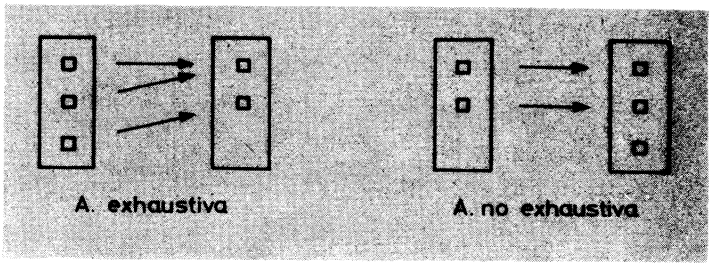


FIG. 1.7.

Ejercicio 8

Considérese de nuevo la aplicación del ejercicio 7. Recordando que el cuadrado de todo entero no nulo es positivo, contéstese:

a) *¿cuál es el conjunto final de esa aplicación?,*

b) *¿cuál es su conjunto imagen?,*

c) *¿coinciden?; ¿cómo es la aplicación?*

Biyectivas. Una aplicación es una biyección si es simultáneamente inyectiva y exhaustiva. O sea:

La aplicación $f: A \to B$ es biyectiva $\iff \forall b \in B, \quad \exists^* a \in A / b = f(a).$

Ejemplo 9

La cuarta aplicación del ejemplo 6 es no inyectiva no exhaustiva.
La segunda aplicación del ejemplo 7 es inyectiva no exhaustiva.
La primera aplicación del ejemplo 8 es no inyectiva exhaustiva.

Ejercicio 9

Reconózcanse qué clases de aplicaciones son las que se representan:

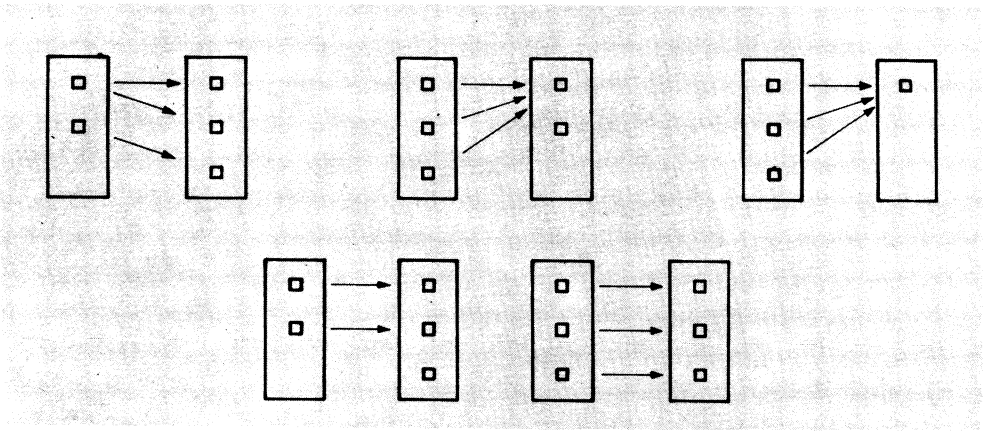


FIG. 1.8.

Ejercicio 10

Contéstese razonadamente a estas preguntas:

a) *Si* $n(A)=5$, *¿cuánto ha de valer* $n(B)$ *para que* $f: A \to B$ *pueda ser biyección?*

b) *Si* $n(A)=7$, *¿qué valores puede tomar* $n(B)$ *si se sabe que existe una* $f: A \to B$ *que es inyectiva?*

c) *Si* $n(A)=10$, *¿qué valores puede tomar* $n(B)$ *si se puede establecer una* $f: A \to B$ *exhaustiva?*

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 1.1

1. $(1, a)$; $(1, b)$.

2. $21 \times 5 = 105$ sílabas.

3. $9 \times 10 = 90$ números.

4. $n(>500) \times n$ (primos) $\times n$ (pares) $= 5 \times 5 \times 5 = 125$.

5. Peligro 17 no 65.

6. *a)* **no**, a tiene dos imágenes;
b) **no**, c no tiene imagen;
c) **no**, a no tiene imagen y b tiene dos.

7. $3^2=9$; $(-3)^2=9$; $f(3)=f(-3)$; **no.**

8. Z; $Z^+ \cup \{0\}$; **no**; no exhaustiva.

9. **no** es aplicación; A. no inyectiva no exhaustiva; A. no inyectiva exhaustiva; A. inyectiva no exhaustiva; biyección.

10. *a)* 5; *b)* $n(B) \geqslant 7$; *c)* $n(B) \leqslant 10$.

1.2

Aplicaciones entre conjuntos finitos. Combinatoria

1. VARIACIONES CON REPETICION

Sean los conjuntos

$$A=\{1,\ 2,\ 3\} \quad \text{y} \quad B=\{a,\ b\}.$$

Construyamos todas las posibles aplicaciones entre ellos:

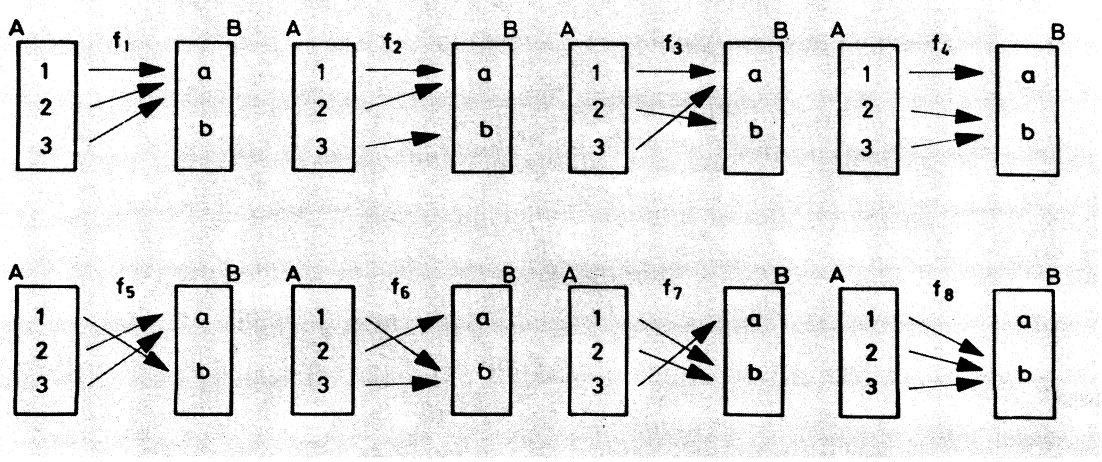
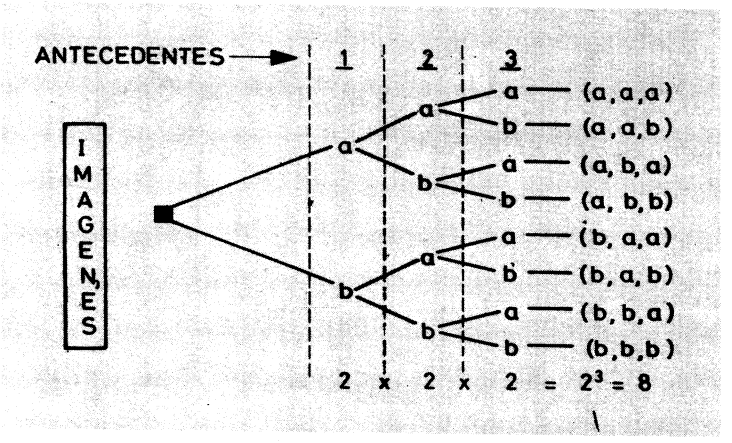


FIG. 1.9.

¿Cómo se han conseguido establecer las ocho aplicaciones anteriores «sin perderse»? Mediante este diagrama de árbol, hecho con las imágenes de los antecedentes 1, 2 y 3.



Si en lugar de ser $n(A)=3$ y $n(B)=2$ fuera, en general, $n(A)=m$ y $n(B)=n$, el número de aplicaciones, en lugar de ser $2^3=8$, sería n^m.

A cada uno de los grupos de imágenes que resultan se le denomina *variación con repetición* de los n elementos del conjunto imagen, que se pueden repetir hasta m veces.

De modo que, para contabilizar el número de variaciones con repetición que es posible formar con n objetos, que se pueden repetir hasta m veces, basta con contar el número de aplicaciones, $n(f_a)$, que es posible establecer entre un conjunto de m elementos y el conjunto de los n objetos. Y, tal como se ha visto, es:

$$\boxed{n(f_a)=VR_{n,m}=n^m}$$

Ejemplo 10

¿Cuántas aplicaciones distintas pueden establecerse entre el conjunto

$$P=\{1.^o,\ 2.^o,\ 3.^o,\ 4.^o,\ 5.^o,\ 6.^o,\ 7.^o,\ 8.^o,\ 9.^o,\ 10.^o,\ 11.^o,\ 12.^o,\ 13.^o,\ 14.^o\}$$

y el conjunto

$$S=\{1,\ x,\ 2\}?$$

$$n(f_a)=VR_{3,14}=3^{14}=4\,782\,969.$$

Son las variaciones con repetición de los tres signos de S, que se pueden repetir hasta catorce veces.

Ejercicio 11

¿Cuántas quinielas distintas pueden hacerse con los catorce resultados de fútbol de una jornada?

Ejercicio 12

Usando un diagrama de árbol, establézcanse todas las aplicaciones posibles entre el conjunto $A=\{a, b, c\}$ *y el conjunto* $C=\{0, 1\}$.

Ejercicio 13

¿Cuántos números de cuatro cifras pueden escribirse con los guarismos 1, 3 *y* 5?

Ejercicio 14

¿Cuántas familias distintas con seis hijos pueden haber, atendiendo al orden y sexo de los hermanos?

2. VARIACIONES

Se establecen los conjuntos

$$A=\{1, 2, 3\} \quad \text{y} \quad B=\{a, b, c, d\}.$$

¿Cuántas inyecciones $I: A \longrightarrow B$ pueden formarse?

Representemos tres de ellas:

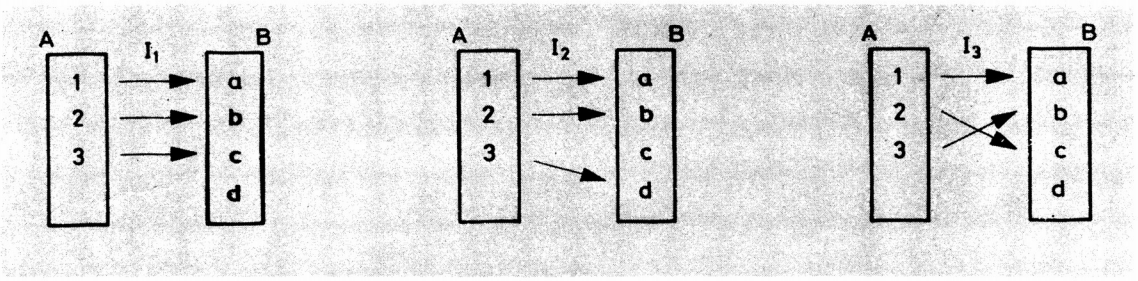


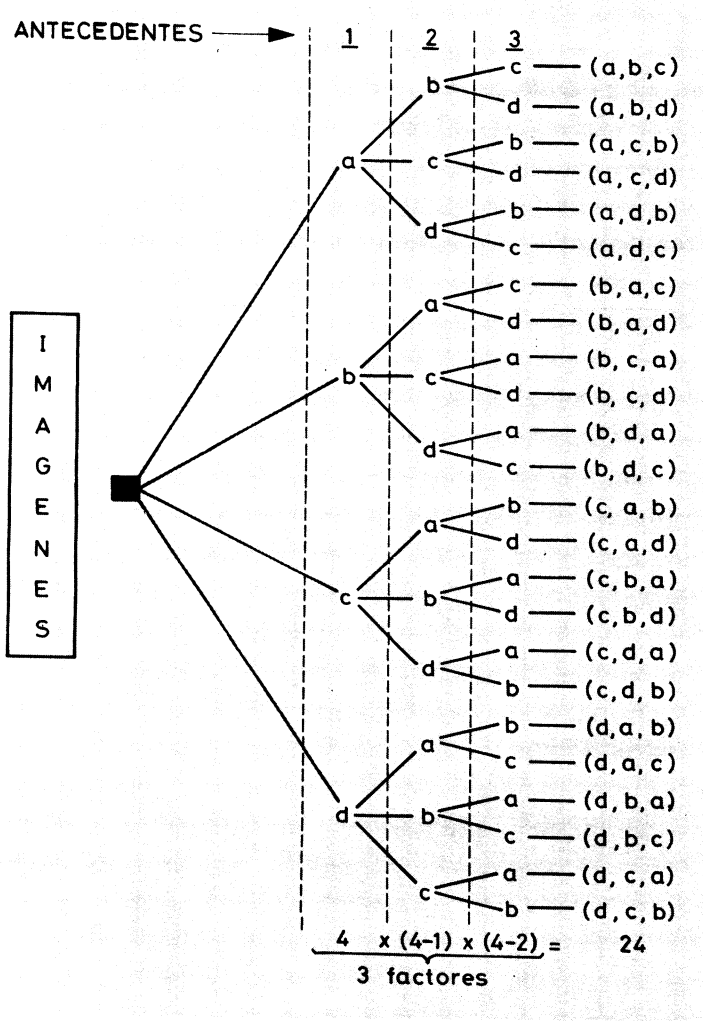
FIG. 1.10.

Obsérvese:

1.° que si a es imagen de 1, $I_1(1)=a$, ya no puede ser imagen de ningún otro antecedente;

2.° que si $I_1(1)=a$, los antecedentes 2 y 3 pueden todavía «escoger» imagen entre b, c y d.

Como otras veces, un diagrama de árbol evitará «perderse», y permite establecer todas las inyecciones.



Si en lugar de $n(A)=3$ y $n(B)=4$ fuese, en general, $n(A)=m$ y $n(B)=n$, el número de inyecciones sería

$$n(I)=\underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ldots}_{m \text{ factores}}$$

A cada uno de los grupos de imágenes que han resultado se le denomina «variación ternaria de cuatro elementos» y, de una manera general, *variación* m-*aria de* n *elementos.*

Así, para contabilizar el número de variaciones m-arias que se pueden formar con n elementos dados, basta con contar el número de inyecciones que pueden establecerse entre un conjunto de m elementos y otro de n:

$$n(I) = V_{n,m} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots}_{m \text{ factores}}$$

OBSERVACIÓN: Conviene tener en cuenta que, por ejemplo, la variación (b, a, c) es distinta de la (a, b, c); es decir, que el orden en que intervienen los elementos también las diferencia.

Ejemplo 11

¿De cuántas maneras pueden quedar los tres primeros puestos de una carrera de automóviles en la que intervienen ocho coches?

Se trata de contabilizar las variaciones de los ocho vehículos, tomados de tres en tres. Son las variaciones ternarias de ocho elementos.

$V_{8,3} = 8 \times 7 \times 6 = 336$ clasificaciones de los tres primeros puestos.

Ejercicio 15

Si se dispone de quince banderas diferentes para hacer señales desde el mástil de un barco, ¿cuántas señales distintas pueden hacerse, usando cada vez tres banderas?

Ejercicio 16

El tratamiento de un enfermo grave está constituido por seis drogas inyectables, que han de administrársele a razón de cuatro inyecciones distintas por día. ¿De cuántos modos puede iniciarse el tratamiento el primer día?

Ejercicio 17

¿Cuántos números de cuatro cifras distintas pueden formarse con los nueve primeros números naturales?

Ejercicio 18

¿Cuántos números de cuatro cifras pueden formarse con los nueve primeros números naturales?

Ejemplo 12

¿Cuántos números de cuatro cifras pueden formarse con los guarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7?

En principio, sería:

$$VR_{8,4}=8^4=4\,096.$$

Pero se entiende que todo número de esos 4 096 que empiece por 0 no es un número de cuatro cifras. Por tanto, habrán de descontarse todos los números que empiezan por 0. ¿Cómo?

Fijado el 0 en el lugar de las unidades de millar, quedan ocho guarismos para formar las variaciones de ocho elementos, que se pueden repetir hasta tres veces

$$\underline{0}\ _\ _\ _$$

Empiezan por 0:

$$VR_{8,3}=8^3=512.$$

$$\text{Número pedido}=4\,096-512=3\,584 \text{ números.}$$

Ejercicio 19

¿Cuántos números mayores de 999 *y menores de* 7 000 *se pueden escribir sin usar los guarismos* 7, 8 *y* 9?

Ejemplo 13

Resuélvase esta ecuación: $\dfrac{V_{n,2}}{10}=n-3.$

$$\frac{n(n-1)}{10}=n-3 \implies n^2-11n+30=0 \begin{cases} n=5 \\ n=6 \end{cases}$$

Ejercicio 20

Resuélvase la ecuación

$$VR_{n,2}+V_{n,2}=28.$$

3. PERMUTACIONES

El único modo de que $\beta: A \to B$ sea una biyección es que los cardinales de los conjuntos finitos A y B sean los mismos

$$n(A)=n(B)=n.$$

Toda biyección ha de ser una aplicación inyectiva (además de exhaustiva).

¿Cuántas biyecciones pueden formarse entre los conjuntos finitos A y B, equipotentes (igual cardinal)? Tantas como inyecciones puedan establecerse entre el conjunto A de n elementos y el conjunto B de otros n elementos

$$n(\beta)=n(I)=\underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ldots}_{n \text{ factores}}$$

¿Cuál será el último factor?

Si al primero se le resta 0 a la n,
al segundo se le resta 1 a la n,
al tercero se le resta 2 a la n,
.....
.....
al n-simo se le restará $n-1$ a la n.

El último factor es

$$n-(n-1)=n-n+1=1.$$

De modo que:

Número de biyecciones
$n(\beta)=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ldots 1.$

Como resulta largo de escribir, se ha establecido un símbolo para estos productos de factores que empiezan en n y acaban en 1. Es éste: $n!$, y se lee «factorial de n».

Ejemplo 14

Calcúlese 5!:

$$5!=5\times 4\times 3\times 2\times 1=120.$$

Ejercicio 21

Determínese 6!

Ejercicio 22

¿Cuántas biyecciones se pueden establecer entre dos conjuntos equipotentes de cardinal $n=7$?

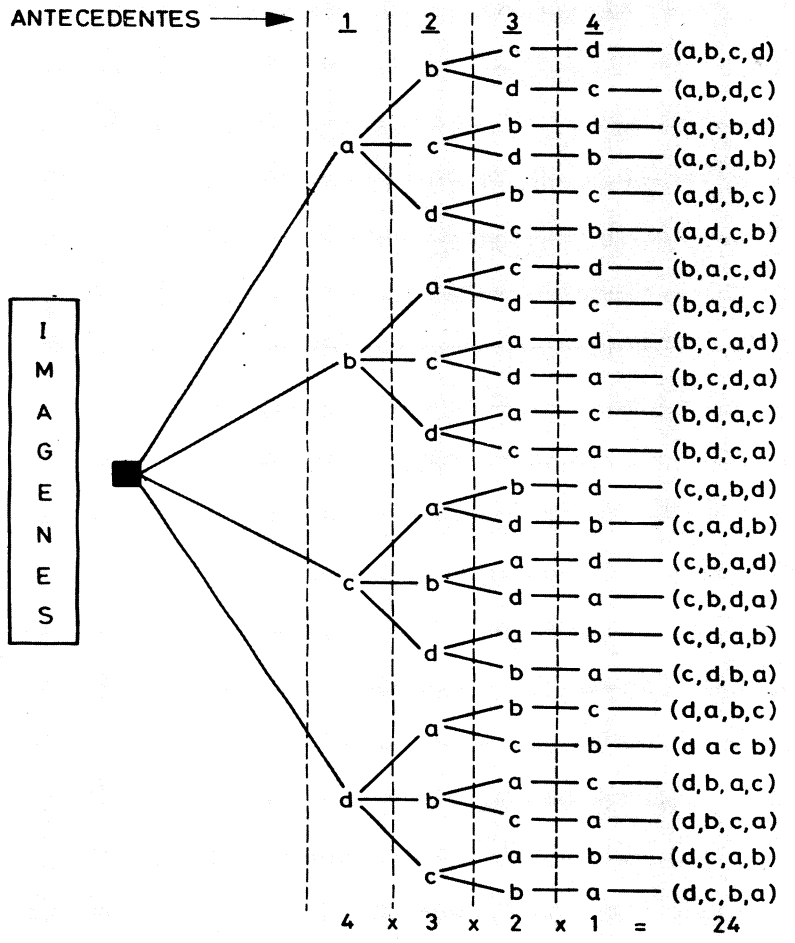
Número de biyecciones
$n(\beta)=n!$

Ejemplo 15

Fórmense todas las biyecciones entre los conjuntos

$$A=\{1,2,3,4\} \quad \text{y} \quad B=\{a,b,c,d\},$$

usando un diagrama de árbol



Los veinticuatro grupos de imágenes que han resultado reciben el nombre de **permutaciones** de cuatro elementos.

Si en lugar de cuatro elementos, hubieran sido n, se habrían contabilizado

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 1 \text{ permutaciones.}$$

Así, el número de permutaciones de n elementos coincide con el número de biyecciones que se pueden establecer entre dos conjuntos equipotentes de n elementos, de manera que

$$\boxed{n(\beta) = P_n = n!}$$

OBSERVACIÓN: Conviene tener en cuenta que todas las permutaciones están formadas por los mismos elementos, diferenciándose unas de otras únicamente en el orden de esos elementos.

Ejercicio 23

Empleando un diagrama de árbol, establézcanse las $3! = 6$ *permutaciones de los elementos del conjunto blanco, negro, rojo.*

Ejemplo 16

¿En cuántos desfiles distintos pueden exhibir cinco señoritas maniquíes los cinco modelos de una colección?

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \text{ desfiles distintos.}$$

Ejercicio 24

¿De cuántos modos distintos pueden desfilar ocho agrupaciones de ejército?

Ejercicio 25

Con los guarismos 1, 2, 3, 4, *y* 5, *¿cuántos números de cinco cifras diferentes pueden escribirse?*

Ejemplo 17

¿Cuántos números de cinco cifras distintas se pueden escribir con los guarismos 0, 1, 2, 3 y 4?

En principio,

$$P_5 = 5! = 120.$$

Pero los números que empiezan por 0 no son números de cinco cifras. Habrá que descontarlos; ¿cómo? Si se fija el 0 en el lugar de las decenas de millar,

$$\underline{0}\ _\ _\ _\ _,$$

quedan así cuatro huecos a llenar con las cifras 1, 2, 3, 4; de modo que:

Número de números que empiezan por $0 = P_4 = 4! = 24$.
Número pedido $= 120 - 24 = 96$.

Ejercicio 26

¿Cuántos números de cuatro cifras diferentes se pueden escribir con los guarismos 0, 2, 4, *y* 6?

Ejercicio 27

¿Cuántos números pares de cuatro cifras distintas se pueden escribir con los guarismos 2, 3, 4 *y* 6?

Ejemplo 18

Calcúlese $\frac{9!}{6!}$.

Conviene desarrollar la factorial superior hasta que se alcance la inferior, y, así, simplificar

$$\frac{9!}{6!}=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6!}{6!}=9\cdot 8\cdot 7=504.$$

Ejercicio 28

Calcúlese, simplificando previamente,

$$k=\frac{5!\times 80!}{4!\times 78!}$$

Ejemplo 19

Calcúlese

$$\frac{(n-2)!}{(n-4)!}=\frac{(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)!}{(n-4!)}=(n-2)\cdot(n-3)=n^2-5n+6.$$

Ejercicio 29

Determínese, simplificando previamente,

$$A=\frac{(k-3)!}{k!}$$

Ejemplo 20

Exprésense, como cociente de factoriales, los siguientes productos:

a) $5\times 4\times 3$

$$5\times 4\times 3=\frac{5\times 4\times 3\times 2\times 1}{2\times 1}=\frac{5!}{2!}$$

b) $(n-1)\,(n-2)\,(n-3)=\frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)!}{(n-4)!}=\frac{(n-1)!}{(n-4)!}$

Ejercicio 30

Exprésense, como cociente de factoriales:

a) $A = 8 \times 7$.

b) $V_{n,m} = n(n-1)(n-2) \ldots (n-m+1)$.

Ejercicio 31

Resuélvase la ecuación

$$V_{n,2} + 3 \cdot P_2 = 6n$$

4. APLICACION CARACTERISTICA DE UN SUBCONJUNTO. CARDINAL DEL CONJUNTO-POTENCIA

Recuérdese que conjunto-potencia de un conjunto A, también llamado «conjunto de las partes de A», es el conjunto formado por todos los subconjuntos propios e impropios de A.

Ejemplo 21

Sea el conjunto $A = \{a, b, c\}$. El conjunto de sus partes o conjunto-potencia de A es:

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}.$$

El primero y el último de los ocho subconjuntos establecidos son los llamados impropios: el vacío y el propio A.

Se trata de contabilizar todos los subconjuntos de un conjunto finito A, o, lo que es igual, calcúlese el cardinal de $P(A)$.

Considérense el conjunto

$$A = \{a, b, c, d, e\},$$

y el subconjunto suyo

$$B = \{a, b, c\}.$$

Entre A y el subconjunto $\{0, 1\}$ se establece una aplicación con el siguiente criterio:

$$\text{«Si } x \in B \Longrightarrow f(x) = 1; \quad \text{si} \quad x \notin B \Longrightarrow f(x) = 0\text{».}$$

La aplicación establecida recibe el nombre de «aplicación característica» del subconjunto B.

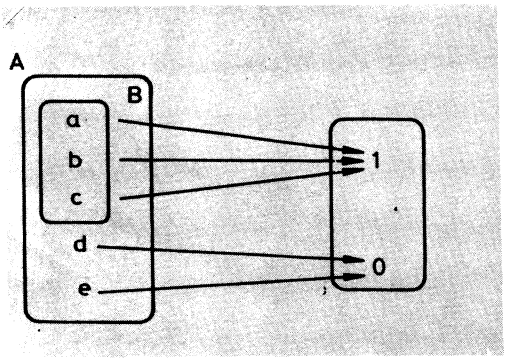


FIG. 1.11.

Sucede que:

1.° Si dos subconjuntos de A son distintos, sus aplicaciones características también lo son.

2.° Recíprocamente, si dos aplicaciones características son distintas, determinan subconjuntos distintos.

CONCLUSIÓN: ¿Cuántos subconjuntos tiene A?

Tantos como aplicaciones características puedan establecerse: las variaciones, con repetición de los elementos 0 y 1, que se pueden repetir hasta cinco veces.

$$n[P(A)] = VR_{2,5} = 2^5 = 32 \text{ subconjuntos.}$$

En general, si A tiene m elementos,

$$\boxed{n[P(A)] = 2^m \text{ subconjuntos.}}$$

Ejercicio 32

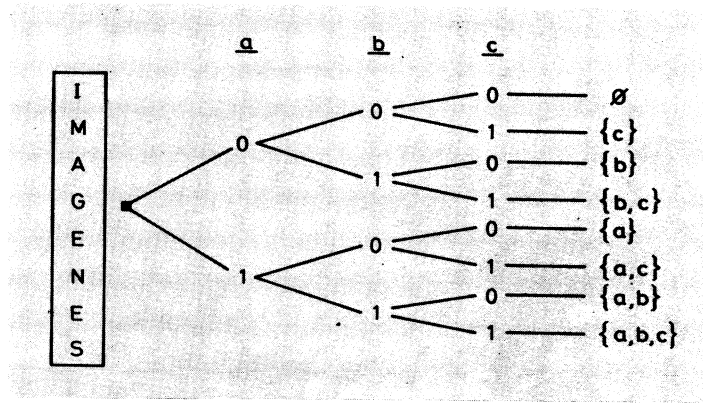
¿Cuántos subconjuntos tiene el conjunto $A = \{2, 3, 5, 7\}$?

Ejercicio 33

¿Cuántos números compuestos se pueden formar con los factores primos del ejercicio anterior, sin elevar ninguno a exponente mayor que la unidad?

Ejemplo 22

Mediante un diagrama de árbol, establézcanse ordenadamente todos los subconjuntos de $A = \{a, b, c\}$.



Criterio o código: 1 es $\in$ Subconjuntos
0 es $\notin$

Ejercicio 34

Determínense con un diagrama de árbol los $2^4 = 16$ *subconjuntos de* $A = \{a, b, c, d\}$.

Ejercicio 35

¿Cuántos elementos tiene el conjunto A, si posee trece subconjuntos?

5. COMBINACIONES

Se acaba de ver que el número de subconjuntos que tiene un conjunto finito A de n elementos es 2^n.

A partir de ahora, y en este capítulo, se empleará otro nombre para los subconjuntos: se los llamará *combinaciones.*

Así, los subconjuntos unitarios se denominarán «combinaciones unitarias de n elementos»; los subconjuntos con dos elementos se llamarán «combinaciones binarias de n elementos»; y el subconjunto más amplio, el propio A, recibirá el nombre de «combinación n-aria de n elementos».

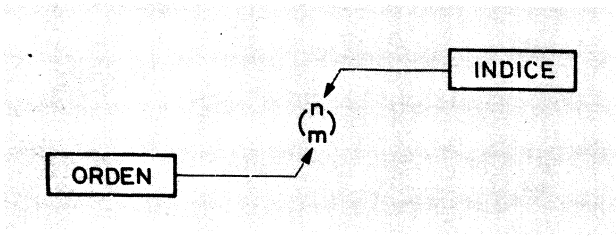
El subconjunto $\emptyset$, por convenio, se denomina «combinación de 0 elementos de los n de A».

Se crea un símbolo nuevo, llamado *número combinatorio,* que representa el número de combinaciones de la clase que sus números indican. Por ejemplo,

$$\binom{5}{3}$$

significa el número de combinaciones ternarias que se pueden hacer con cinco elementos. O, lo que es igual, el número de subconjuntos distintos de tres elementos que tiene un conjunto de cinco elementos.

Los términos de un número combinatorio tienen nombres propios:



OBSERVACIÓN: El número combinatorio $\binom{2}{7}$ no tiene sentido. ¿Cómo es posible que de un conjunto de dos elementos se pueda conseguir un subconjunto con siete?

Consecuencia: en todo número combinatorio,

índice $\geqslant$ orden

— el número de subconjuntos vacíos se simboliza como: $\binom{5}{0}$

— el número de subconjuntos unitarios se representa así: $\binom{5}{1}$

— el número de subconjuntos binarios se simboliza de este modo: $\binom{5}{2}$

— el número de combinaciones ternarias de cinco elementos es: $\binom{5}{3}$

— el número de combinaciones cuaternarias de cinco elementos es: $\binom{5}{4}$

— el número de subconjuntos de cinco elementos de A lo escribimos así: $\binom{5}{5}$

$\Big\}+$

Claro está que la suma de los números de todos esos subconjuntos ha de dar 2^5, que es el número de subconjuntos de A. De modo que

$$\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}=2^5=32.$$

¿Cuánto vale cada uno de esos sumandos?

$\binom{5}{0}=1$, porque sólo hay un subconjunto vacío.

$\binom{5}{5}=1$, porque A sólo tiene un subconjunto de cinco elementos: él mismo.

Pero, ¿y los demás? Por ejemplo, ¿cuántos subconjuntos de tres elementos

tiene A? O, lo que es igual, ¿cuántas combinaciones ternarias se pueden hacer con cinco elementos? Es decir, ¿cuál es el valor de $\binom{5}{3}$?

Contabilicemos todas las inyecciones del conjunto $C=\{1, 2, 3\}$ en el

$$A=\{a, b, c, d, e\}.$$

Representemos tres de ellas:

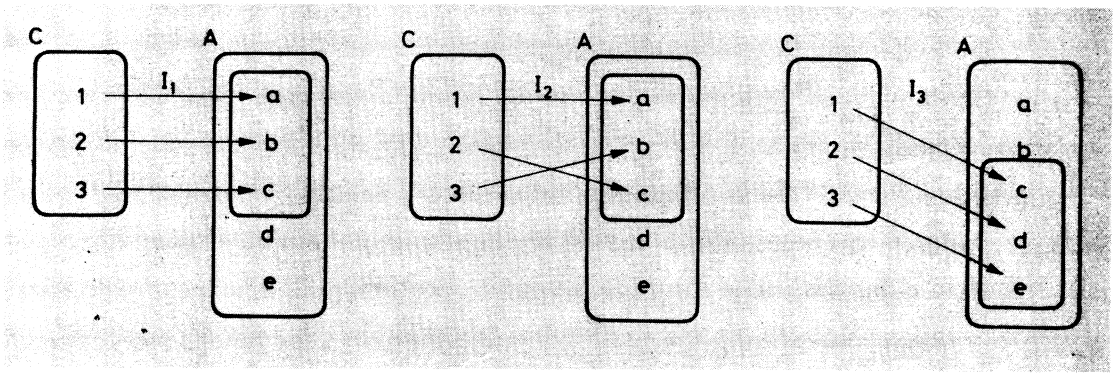


FIG. 1.12.

Sabemos que

$$n(I)=V_{5,3}=60.$$

Cada una de esas inyecciones, ¿determina un subconjunto ternario distinto? **No.** Obsérvese cómo la I_1 y la I_2, por ejemplo, producen el mismo subconjunto.

¿Cómo se pueden descontar las inyecciones que producen el mismo subconjunto?

Por cada subconjunto de imágenes hay $P_3=3!$ inyecciones que lo producen. Así, bastará dividir por P_3 el número de inyecciones para conseguir el número de subconjuntos ternarios distintos. Es decir:

Número de subconjuntos de tres elementos del conjunto A.
Número de combinaciones ternarias de sus cinco elementos.

$$\binom{5}{3}=\frac{V_{5,3}}{P_3}=\frac{5\cdot4\cdot3}{3!}=\frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2}=10.$$

Hay diez subconjuntos ternarios. Son diez las combinaciones ternarias de cinco elementos.

Ejercicio 36

Calcúlense

$$\binom{5}{2} \quad \text{y} \quad \binom{5}{4}.$$

Ejercicio 37

Compruébese que

$$\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}=32.$$

Ejercicio 38

¿Cuántos subconjuntos distintos de cuatro elementos se pueden formar con los diez de un conjunto A?

Ejercicio 39

¿Cuántas combinaciones de seis letras se pueden formar con las diez primeras del alfabeto?

Conviene establecer de forma general el valor del número combinatorio $\binom{n}{m}$, es decir, la fórmula que dé cuántas combinaciones m-simas se pueden realizar con n elementos.

$$\binom{n}{m}=\frac{V_{n,m}}{P_m}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{m!}$$

Multiplicando arriba y abajo por $(n-m)!$ resulta

$$\binom{n}{m}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)(n-m)!}{m!(n-m)!}$$

con lo que en el numerador se consigue $n!$

Número de combinaciones

$$\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Otro modo de simbolizar las combinaciones m-arias de n elementos es $C_{n,m}$, de manera que:

$$C_{n,m}=\binom{n}{m}=\frac{V_{n,m}}{P_m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Ejercicio 40

Calcúlese $\binom{100}{98}$.

Ejercicio 41

Determínense cuántos subconjuntos de dos elementos se pueden formar con los cien elementos de un conjunto A.

Ejercicio 42

Véanse los resultados de los ejercicios 38 *y* 39, *y también los de los ejercicios* 40 *y* 41. *Escríbase lo que sugieren.*

Ejemplo 23

Mezclando de tres en tres seis colores base, ¿cuántos colores compuestos se pueden obtener?

Se dispone de seis elementos y se toman de tres en tres.

— No son permutaciones, porque, si lo fuesen, habrían de entrar en cada grupo todos, es decir, los seis elementos dados.

— ¿Son variaciones o combinaciones ternarias de seis elementos?

La mezcla de los colores *a, b, c* alcanza el mismo resultado que la mezcla *b, a, c,* lo que significa que el orden no los diferencia: se trata de combinaciones.

$$\text{Colores compuestos} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 3!} = 20.$$

Ejercicio 43

Con cinco materiales laminares, ¿cuántos compactos de dos materiales se pueden hacer, pegándolos?

Ejercicio 44

Con cinco bebidas diferentes, ¿cuántas combinaciones se pueden hacer, mezclándolas de tres en tres?

Ejercicio 45

¿Cuántas diagonales tiene un hexágono convexo?

Ejercicio 46

Repasado el ejercicio 42, *inténtese resolver esta ecuación:*

$$\binom{1\,000}{98-x} = \binom{1\,000}{3x}.$$

Ejercicio 47

Resuélvase la ecuación

$$3\cdot\binom{n}{4} = 5\cdot\binom{n}{2}.$$

Ejercicio 48

Con n objetos se pueden formar cuatrocientas treinta y cinco variaciones binarias más que combinaciones, tomados de dos en dos. Calcúlese n.

Ejercicio 49

El número de combinaciones binarias de n elementos, sumado con el de variaciones de esos n elementos, tomados de dos en dos, es ciento treinta y cinco. Determínese n.

6. NUMEROS COMBINATORIOS. PROPIEDADES

Antes de nada, recordemos algunos convenios de escritura e identidades. Se conviene en que

$$\boxed{0! = 1.}$$

Véase por qué: El número combinatorio

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{0!\,n!} = \frac{1}{0!}$$

representa el número de subconjuntos vacíos de un conjunto, que sabemos que es 1. Por tanto,

$$\frac{1}{0!} = 1 \Longrightarrow 0! = 1$$

Por la razón expuesta,

$$\boxed{\binom{n}{0} = 1}$$

Ya vimos que

$$\boxed{\binom{n}{n} = 1}$$

Por último, se conviene en escribir

$$\boxed{\binom{0}{0} = 1}$$

ya que representa el número de subconjuntos vacíos que tiene el conjunto vacío; a saber, él mismo: 1.

Primera propiedad

$$\boxed{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n}$$

Ya quedó descrito que el número de subconjuntos vacíos, más el de unitarios, más el de binarios, etc., es el número total de subconjuntos, o sea, 2^n.

Segunda propiedad

$$\boxed{\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}}$$

En efecto: Por cada subconjunto de m elementos que se puede formar con los n elementos de ese conjunto hay otro, formado por los $n-m$ elementos restantes. Así, el número de ambos subconjuntos es el mismo.

Ejercicio 50

Compruébese, desarrollando ambos números combinatorios, la identidad

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

Tercera propiedad

$$\boxed{\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}}$$

En efecto: Sea un elemento $a \in A$, cuyo cardinal es n.

Los subconjuntos m-arios de A

— pueden tener al elemento a,

— pueden no tenerlo.

¿Cuántos subconjuntos m-arios tienen el elemento a?

Prescindiendo de a quedan $n-1$ elementos, con los que se pueden hacer $\binom{n-1}{m-1}$ subconjuntos distintos de $m-1$ elementos.

Poniendo ahora a a cada uno de estos subconjuntos, se obtienen todos los m-arios que contienen al elemento a.

Son, pues, $\binom{n-1}{m-1}$.

¿Cuántos subconjuntos m-arios no tienen el elemento a?

Con los otros $n-1$ elementos se pueden formar $\binom{n-1}{m}$ m-arios.

Entonces, el número de subconjuntos m-arios que contienen el elemento a, más el de los subconjuntos m-arios que suprimen el elemento a, ha de ser el número total de subconjuntos m-arios. De modo que queda justificado que

$$\boxed{\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}}$$

Ejercicio 51

Compruébese esta tercera propiedad desarrollando los dos sumandos del segundo miembro y operando.

Ejercicio 52

Resuélvase la ecuación

$$\binom{10}{4} = \binom{9}{x} + \binom{9}{4}.$$

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 1.2

11. Véase el ejemplo 10.

12. Basta consultar la teoría inmediatamente anterior. Son ocho aplicaciones.

13. $3^4 = 81$ números.

14. $VR_{2,6} = 2^6 = 64$ familias.

15. $V_{15,3} = 15 \times 14 \times 13 = 2\,730$ señales distintas.

16. $V_{6,4} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ formas.

17. $V_{9,4} = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3\,024$ números.

18. $VR_{9,4} = 9^4 = 6\,561$ números.

19. $VR_{7,4} - VR_{7,3} = 2\,058$ números.

20. $n = 4$.

21. $6! = 720$.

22. $n(\beta) = 7! = 5\,040$ biyecciones.

23. Véase el ejemplo 15.

24. $P_8 = 8! = 40\,320$ formas.

25. $P_5 = 5! = 120$ números.

26. $P_4 - P_3 = 4! - 3! = 18$ números.

27. $P_4 - P_3 = 4! - 3! = 18$ números.

28. $k = 31\,600$.

29. $A = 1/(k^3 - 3k^2 + 2k)$.

30. *a)* $A = 8!/6!$; *b)* $V_{n,m} = n!/(n-m)!$

31. $n = 6$. La solución $n = 1$ no tiene sentido.

32. $n[P(A)] = 2^4 = 16$ subconjuntos.

33. Número de números $= 16 - 1 = 15$ (el conjunto $\emptyset$ se descuenta).

34. Véase el ejemplo 22.

35. $2^n = 13 \Longrightarrow$ no es posible.

36. $\binom{5}{2} = 10$; $\binom{5}{4} = 5$.

37. Basta operar cada uno de los números combinatorios y sumar.

38. $\binom{10}{4} = 210$ subconjuntos.

39. $\binom{10}{6} = 210$ combinaciones.

40. $\binom{100}{98} = 4\,950$.

41. $\binom{100}{2} = 4\,950$.

42. Los números combinatorios de igual índice, si la suma de sus órdenes da el índice, son iguales.

43. $V_{5,2} = 5 \times 4 = 20$ compactos.

44. $\binom{5}{3} = 10$ bebidas.

45. Número de diagonales $= \binom{6}{2} - 6$ lados $= 9$.

46. $98 - x + 3x = 1\,000 \Longrightarrow x = 451$, que debe rechazarse.

47. $n = 7$.

48. $n(n-1) = \binom{n}{2} + 435 \Longrightarrow n = 30$.

49. $\binom{n}{2} + n(n-1) = 135 \Longrightarrow n = 10$.

50. Basta desarrollar. La solución es directa.

51. Cuídese al operar de tomar bien el mínimo común múltiplo de los denominadores.

52. $x = 3$.

1.3

Aplicaciones N ⟶ R. Sucesiones

1. SUCESIONES

En el capítulo anterior se han manejado aplicaciones entre conjuntos finitos. En éste vamos a trabajar con aplicaciones entre dos conjuntos no finitos: el conjunto de los naturales N y el conjunto de los reales $\mathfrak{R}$.

El conjunto de los números naturales es

$$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

El conjunto de los números reales $\mathfrak{R}$ está formado por todos los racionales y los irracionales. Así,

$$Q = \{\ldots, -2, -1/2, -1/3, \ldots, 0, 1/2, 1/3, 3/2, \ldots\}$$

$$H = \{-\sqrt{3}, \ldots, -\sqrt{2}, \ldots, \sqrt{2}, \ldots, \sqrt{3}, \ldots, \pi, \ldots\}$$

$$\mathfrak{R} = Q \cup H.$$

Sucesión en $\mathfrak{R}$ es una aplicación del conjunto de los números naturales N en el conjunto de los números reales $\mathfrak{R}$.

Una forma clásica de indicar una sucesión es dar el conjunto de las primeras imágenes en $\mathfrak{R}$. De este modo:

$$S_n = a_1, a_2, a_3, \ldots$$

* Aun cuando todavía no se ha hecho la introducción experimental al número real $\mathfrak{R}$, se dispone aquí este capítulo por entenderse que son más las ventajas que con esta localización se consiguen que los pequeños inconvenientes de utilizar $\mathfrak{R}$ «antes de tiempo». Por otra parte, se cuidará de manejar solamente números en Q, aunque desde las relaciones métricas aprendidas en la E. G. B., el alumno utiliza números como $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ sin evidente repugnancia.

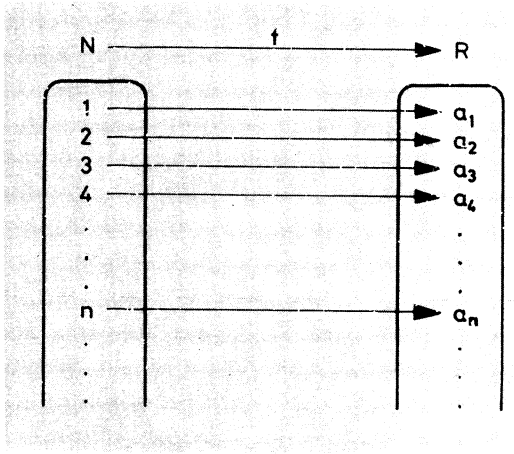


FIG. 1.13.

Ejemplo 24

Si se establece la sucesión $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$, quiere decirse que la imagen real del natural 1 es $\frac{1}{2}$. O sea,

$$f(1) = 1/2.$$

Y también que

$$f(2) = 2/3$$
$$f(3) = 3/4$$
$$\vdots \quad \vdots$$

Se denomina:

> Término general de la sucesión S_n es el criterio f de la aplicación que la define.

Así, si la sucesión S_n tiene de término general $a_n = \frac{n}{n+1}$, se trata de la sucesión cuyos primeros términos son

$$S_n = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$$

Ha bastado sustituir n por el antecedente natural. Para conseguir la imagen a_1 se ha puesto $n = 1$; para obtener la a_2 se ha sustituido n por 2, etc.

Ejercicio 53

Determínese el quinto término de la sucesión cuyo término general es

$$a_n = \frac{n+1}{n^2}$$

Ejercicio 54

Calcúlense los tres primeros términos de lugares pares de la sucesión cuyo término general es

$$a_n = \frac{2n+1}{n}$$

Un modo cómodo de expresar una sucesión es indicando, mediante su término general entre llaves, el subconjunto real de sus imágenes. Así, por ejemplo,

$$S_n = \left\{ \frac{2n^2-1}{n} \right\}$$

Conocido el término general, es elemental conseguir cualquier término de la sucesión. El problema contrario ya no resulta tan sencillo.

Ejemplo 25

Determínese el término general de la sucesión cuyos primeros términos son

$$\frac{3}{1}, \frac{4}{4}, \frac{5}{9}, \frac{6}{16}, \frac{7}{25}, \ldots$$

Se observa que el primer numerador 3 es $2+n$ para $n=1$, y los restantes también se consiguen de ese modo. Los denominadores son los cuadrados de los números naturales.

El término general es

$$a_n = \frac{n+2}{n^2}$$

Ejercicio 55

Determínese el término general de las sucesiones cuyos «primeros» términos son

a) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \ldots$

b) $\frac{1}{1}, \frac{2}{4}, \frac{3}{9}, \frac{4}{16}, \ldots$

c) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \ldots$

d) $\frac{1}{1}, \frac{2}{2\cdot 1}, \frac{3}{3\cdot 2\cdot 1}, \frac{4}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}, \ldots$

2. PROGRESIONES ARITMETICAS

Progresión aritmética es una sucesión de números reales cuyo término general es una función afín de N en $\mathfrak{R}$.

$$a_n = d \cdot n + q.$$

d y q constantes reales.

Ejemplo 26

La sucesión $a_n = \{2n + 1/2\}$ es una progresión aritmética cuyos primeros términos son

$$\frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \frac{13}{2}, \frac{17}{2}, \ldots$$

Si se representa la función, se obtiene una serie de puntos alineados que corresponden a cada uno de los términos de la sucesión.

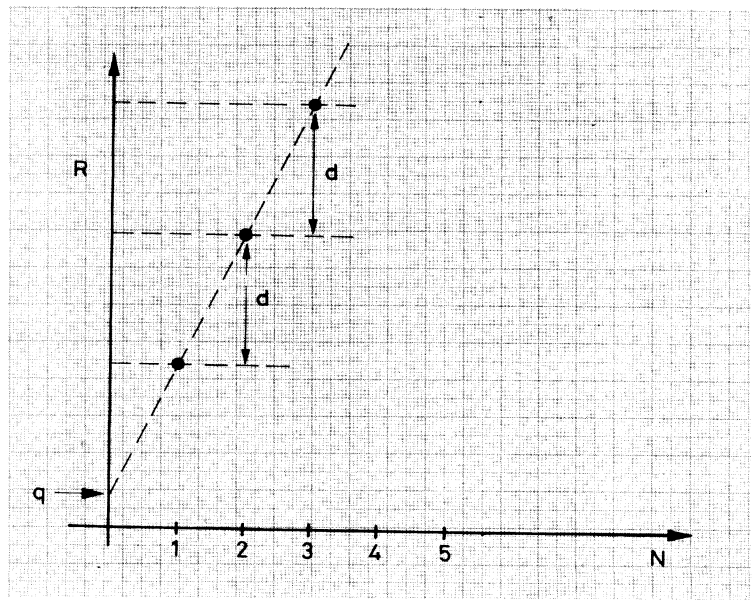


FIG. 1.14.

Ejercicio 56

Dibújese la gráfica de la función que es simétrica de la dibujada en el ejemplo 26, respecto del eje N, y después, establézcase el término general de la progresión aritmética que representa.

Ejercicio 57

Determínese el término a_{15} *de la progresión aritmética*

$$a_n = \left\{ \frac{3}{5} n - \frac{1}{10} \right\}$$

Propiedad fundamental de las progresiones aritméticas

> La diferencia entre dos términos consecutivos de una progresión aritmética es constante; se representa por d y se llama «diferencia de la progresión».

En efecto:

Considérense de la progresión aritmética

$$a_n = \{ d \cdot n + q \},$$

los términos consecutivos de lugar k y de lugar $k-1$

$$\left.\begin{array}{r} a_k = dk + q \\ a_{k-1} = d(k-1) + q \end{array}\right\} -$$

$$\overline{a_k - a_{k-1} = dk + q - d(k-1) - q}$$

$$a_k - a_{k-1} = dk - dk + d$$

$$\boxed{a_k - a_{k-1} = d}$$

CONSECUENCIA. Cualquier término de una progresión aritmética, excepto el primero, se calcula sumando al anterior la diferencia constante d.

Ejemplo 27

¿Cuál es el término general de una progresión aritmética cuya diferencia es $d=2$, y cuyo primer término es 1/2?

$$a_n = d \cdot n + q$$

para $n=1$:

$$\frac{1}{2} = 2 \cdot 1 + q \implies q = -\frac{3}{2}$$

$$\boxed{a_n = 2n - 3/2}$$

Ejercicio 58

El cuarto término de una progresión aritmética cuya diferencia es $d=1/3$ *es* $-1/4$. *Establézcase el término general de la progresión.*

Relación entre dos términos cualesquiera de una progresión aritmética

Sea la progresión aritmética

$$a_n=\{dn+q\}.$$

Su término de lugar j será:

$$a_j=dj+q.$$

Y su término de lugar i tendrá la forma

$$a_i=di+q.$$

La diferencia de términos es:

$$\begin{aligned} a_j-a_i&=dj+q-(di+q)\\ &=dj+q-di-q\\ &=d(j-i), \end{aligned}$$

de donde

$$\boxed{a_j=a_i+d(j-i)}$$

Cualquier término de una progresión aritmética es igual a otro, más tantas veces la diferencia como la resta de sus índices.

Como caso particular, se usa con frecuencia la fórmula del término general a_n en función del primero a_1.

$$\boxed{a_n=a_1+d(n-1)} \qquad [1]$$

Ejemplo 28

El cuarto término de una progresión aritmética de razón -2 es $2/3$. Calcúlese el décimo:

$$\begin{aligned} a_{10}&=a_4+d(10-4)\\ a_{10}&=-2+2/3\cdot 6=2. \end{aligned}$$

Ejercicio 59

Calcúlese el término de lugar 1 000 *de la progresión aritmética cuyos primeros términos son*

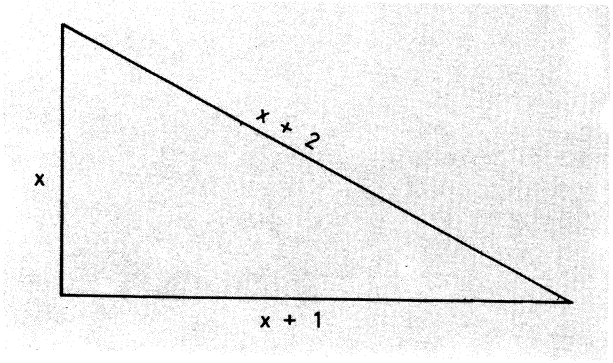
$$-2,\ -3/2,\ -1,\ -1/2,\ 0,\ 1/2,\ \ldots$$

Ejercicio 60

Determínese el término general de una progresión aritmética, siendo $a_3 = 12$, *y la diferencia,* $d = -4$.

Ejemplo 29

Los lados de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética de diferencia 1 cm. Calcúlese su perímetro y su área.



$(x+2)^2 = (x+1)^2 + x^2 \Longrightarrow x = 3$

Perímetro $= 3 + 4 + 5 = 12$ cm

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\, 3 \cdot 4 = 6 \text{ cm}^2$$

FIG. 1.15.

Ejercicio 61

Los lados de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética de diferencia 4 *cm.*

Determínense su perímetro, su área y la superficie del círculo circunscrito.

Interpolación de medias diferenciales

Los términos de una progresión aritmética reciben el nombre genérico de «medias diferenciales».

> Interpolar m medias diferenciales entre dos números dados, A y B, es construir una progresión aritmética de $m+2$ términos, cuyos extremos son los números dados.

$$\overbrace{A - - - - - - - B}^{m}$$
$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{m+2 \text{ términos}}$$

Para construir esa progresión aritmética basta con calcular la diferencia d. Tomando como último término B, y como primero, A, resulta de [1]:

$$B = A + d(m + 2 - 1)$$

$$\boxed{\frac{B - A}{m+1} = d}$$

Ejercicio 62

Constrúyase una progresión aritmética de cinco términos que tengan por extremos 7 *y* -1.

Ejercicio 63

Interpólense cuatro medias diferenciales entre 9 *y* 24.

Ejercicio 64

Despejando n de la fórmula [1], *resuélvase esta cuestión: calcúlense cuántos múltiplos de* 3 *hay entre* 14 *y* 82.

(Adviértase que ni 14 ni 82 son múltiplos de 3.)

Suma de *n* primeros términos de una progresión aritmética

Cálculo previo: *Suma de dos términos equidistantes de una progresión aritmética.*

Considérense los n primeros términos de una progresión aritmética:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, \ldots, a_{n-k+1}, a_{n-1}, a_n$$

Se denominan equidistantes los términos

1.º y n.º
2.º y $(n-1)$.º
3.º y $(n-2)$.º,
.....
.....;

de modo que, obsérvese, la suma de los índices siempre es $n+1$.

Así, el equidistante de un cualquiera a_k es a_{n-k+1}.
Veamos cuánto vale la suma de dos términos equidistantes.

$$a_k = a_1 + (k-1)d$$
$$a_{n-k+1} = a + (n-k+1-1)d$$
.....
$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_1 + kd - d + nd - kd$$
$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_1 + (n-1)d$$

$$\boxed{a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n}$$

La suma de dos términos equidistantes de una progresión aritmética es constante e igual a la suma de los términos extremos considerados.

Ejemplo 30

En la progresión aritmética cuyos diez primeros términos son

$$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19,\ 21$$
$$3+21=5+19=7+17=9+15=11+13.$$

Ejercicio 65

Determínese el valor constante de la suma de parejas de términos equidistantes de la progresión

$$a_n=\{2n-5\}$$

en sus cien primeros términos.

Ahora que sabemos cuánto vale la suma de dos términos equidistantes, calcularemos la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética.

Sea la progresión aritmética cuyos n primeros términos son:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n$$

La suma de sus n términos es

$$\left.\begin{aligned} S_n &= a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n \\ S_n &= a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\ldots+a_3+a_2+a_1 \end{aligned}\right\}+$$

$$2S_n=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})+\ldots+(a_n+a_1).$$

Cada uno de esos n paréntesis está formado por la suma de dos términos equidistantes, de modo que se puede escribir:

$$2S_n=n\cdot(a_1+a_n)$$

$$\boxed{S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n}$$

La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética es igual a la semisuma de extremos por el número de términos.

Es curioso un caso particular: cuando el número de términos considerado de la progresión aritmética es impar, hay un *término central,* que designaremos a_c, que es su propio equidistante de los extremos. Entonces

$$a_c+a_c=a_1+a_n$$
$$2a_c=a_1+a_n$$

En este caso, la fórmula de la suma de S_n puede tomar la forma cómoda

$$S_n = \frac{2a_c}{2} \cdot n$$

$$\boxed{S_n = a_c \cdot n}$$

Ejercicio 66

Determinar la suma de los treinta primeros términos de la progresión aritmética

$$a_n = \{2n - 5\}.$$

Ejercicio 67

El término central de una progresión aritmética de quince términos es 2/5. *Determínese la suma de esos quince términos.*

Ejercicio 68

Determínense los ángulos de un triángulo que los tiene en progresión aritmética, de diferencia 35°.

Ejercicio 69

Recordando que la suma de los ángulos interiores de un polígono es igual a tantas veces 2R como lados tiene menos 2, *determínense los de un hexágono, sabiendo que están en progresión aritmética de diferencia* 20°.

3. PROGRESIONES GEOMETRICAS

Progresión geométrica es una sucesión de números reales cuyo término general es una función exponencial de N en $\mathfrak{R}$.

$$a_n = p \cdot r^n$$

p y r constantes reales.

Ejemplo 31

La sucesión $a_n = \{3 \cdot 2^n\}$ es una progresión geométrica cuyos términos son:

6, 12, 24, 48, ...

Si se hace la gráfica de la función, se obtiene una serie de puntos que representan cada uno de los términos de la progresión. Para poder representar «sin que se salga» del papel una progresión geométrica han de escogerse

diferentes escalas en el eje N y en el eje $\mathfrak{R}$. Ello es debido a que los términos de una progresión geométrica crecen o decrecen «muy de prisa».

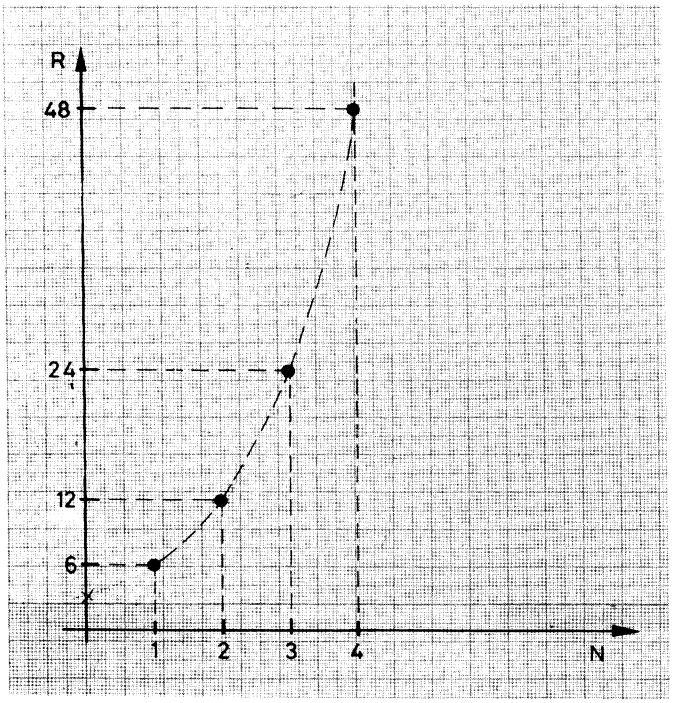


FIG. 1.16.

Ejercicio 70

Escríbanse los cinco primeros términos de la progresión geométrica

$$a_n = 2^n$$

y represéntense en un diagrama cartesiano $N \times \mathfrak{R}$.

Ejercicio 71

Establézcanse los cinco primeros términos de la progresión geométrica

$$a_n = \left\{ \frac{1}{4} \cdot (-2)^n \right\} .$$

Propiedad fundamental de las progresiones geométricas

El cociente de dos términos consecutivos de una progresión geométrica es constante, se representa por r, y se llama razón de la progresión.

En efecto:

Considérense, de la progresión geométrica

$$a_n = p \cdot r^n$$

los términos consecutivos de lugares k y $k-1$.

$$\left.\begin{array}{r} a_k = p \cdot r^k \\ a_{k-1} = p \cdot r^{k-1} \end{array}\right\} :$$

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{r^k}{r^{k-1}} = r^{k-(k-1)} = r$$

$$\boxed{\frac{a_k}{a_{k-1}} = r}$$

CONSECUENCIA. Cualquier término de una progresión geométrica, excepto el primero, se calcula multiplicando el anterior por la razón r.

Ejemplo 32

El primer término de una progresión geométrica es $\frac{1}{3}$, y la razón es 3. Determínese el término general, y, después, el de lugar 6.

$$a_n = p \cdot r^n$$

para $n = 1 \implies \frac{1}{3} = p \cdot 3^1 \implies p = \frac{1}{9}$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{9} \cdot 3^n \ ;} \qquad a_6 = \frac{1}{9} \cdot 3^6 = 81$$

Ejercicio 72

El sexto término de una progresión geométrica es 81, *y la razón es* $\sqrt{3}$. *Establézcanse el término general y, luego, el de octavo lugar.*

Relación entre dos términos cualesquiera de una progresión geométrica

Sea la progresión geométrica

$$a_n = \{p \cdot r^n\}.$$

Su término de lugar j será:

$$a_j = p \cdot r^j$$

y su término de lugar i tendrá la forma

$$a_i = p \cdot r^i.$$

El cociente de ambos términos es

$$\frac{a_j}{a_i} = \frac{r^j}{r^i}$$

$$\frac{a_j}{a_i} = r^{j-i}$$

De donde

$$\boxed{a_j = a_i \cdot r^{j-i}}$$

Que se lee: «Cualquier término de una progresión geométrica es igual a otro multiplicado por la razón elevada a la diferencia de índices.»

Como caso particular se usa con frecuencia la fórmula del término general a_n en función del primero, a_1.

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}.} \qquad [2]$$

Ejemplo 33

El quinto término de una progresión geométrica de razón $\frac{1}{3}$ es $\frac{1}{27}$. Determínese el octavo.

$$a_8 = a_5 \cdot r^{8-5} \; ; \qquad a_8 = \frac{1}{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{729}$$

Ejercicio 73

El segundo término de una progresión geométrica es 4, *y el tercero,* $\frac{1}{2}$. *Determínense la razón y el sexto término.*

Ejemplo 34

El octavo término de una progresión geométrica de razón 1/2 es 1. Determínese el cuarto término.

$$a_4 = a_8 \cdot r^{4-8}$$

$$a_4 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 1 \cdot 2^4 = 16.$$

Ejercicio 74

El décimo término de una progresión geométrica de razón $\frac{1}{5}$ *es* 0,4. *¿Cuál es el séptimo término?*

Interpolación de medias proporcionales

Los términos de una progresión geométrica reciben el nombre genérico de «medias proporcionales».

> Interpolar m medias proporcionales entre dos números dados, A y B, es construir una progresión geométrica de $m+2$ términos, cuyos extremos son los números dados.

$$\overbrace{A - - - - - - - - - - B}^{m}$$
$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{m+2 \text{ términos}}$$

Para construir esa progresión geométrica basta calcular la razón r. Tomando como último término B, y como primero A, resulta de [2]:

$$B = A \cdot r^{m+2-1}$$

$$B = A \cdot r^{m+1} \qquad \frac{B}{A} = r^{m+1} \Longrightarrow \boxed{\sqrt[m+1]{\frac{B}{A}} = r}$$

Ejercicio 75

Hágase una progresión geométrica de cinco términos que tenga por extremos los números

$$\sqrt{2} \quad y \quad 16\sqrt{2}.$$

Ejemplo 35

Cuando se interpola un solo término proporcional entre dos números dados, resulta una progresión geométrica de tres términos y la media proporcional recibe el nombre de media geométrica de los números dados.

Por ejemplo: Hállese la media geométrica de dos números, a y b.

$$a,\ m_g,\ b$$

Tiene tres términos la progresión, de modo que, según [2]:

$$b = a \cdot r^2$$

$$r = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

La media geométrica, que será el segundo término, es:

$$m_g = a \cdot \left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^{2-1}$$

$$m_g = a\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{a^2 \cdot b}{a}} = \sqrt{ab}$$

Es un resultado general: la media geométrica de dos números a y b es la raíz cuadrada de su producto.

Ejercicio 76

La altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es media geométrica entre los dos trozos que su pie determina sobre esa hipotenusa.

Determínese la altura, h, de un triángulo rectángulo sabiendo que divide a la hipotenusa en dos trozos que valen, $p=2$ *cm, y* $q=8$ *cm.*

Ejercicio 77

Determínese el área del triángulo del ejercicio anterior.

Ejemplo 36

Lo mismo que hemos considerado la media geométrica como el término central de una progresión geométrica de tres términos, ¿no hay para las progresiones aritméticas una situación análoga? Sí, efectivamente:

El término central de una progresión aritmética de tres términos se llama «media aritmética», y su determinación es bien sencilla:

$$\boxed{a,\ m_a,\ b}$$

$$b=a+(3-1)d$$

$$b-a=2d \implies d=\frac{b-a}{2}$$

La media aritmética, que es el segundo término, es

$$m_a=a+\frac{b-a}{2}$$

$$m_a=\frac{2a+b-a}{2}$$

$$\boxed{m_a=\frac{a+b}{2}}$$

El resultado, del todo general, dice que la media aritmética de dos números es igual a su semisuma.

Ejercicio 78

Determínense la m_a *y la* m_g *de* 27 *y* 3.

Ejercicio 79

Determínense la media aritmética y la media geométrica de $\frac{1}{5}$ *y* 125.

Después de hacer los anteriores ejercicios puede sospecharse que la media aritmética de los números positivos siempre es mayor que la media geométrica. ¿Será cierto eso? Sólo se puede afirmar justificándolo de un modo general. Veamos:

$$a>0 \quad b>0 \quad \text{y} \quad a>b$$
$$a-b>0 \,/^2$$
$$a^2+b^2-2ab>0$$
$$a^2+b^2>2ab$$

Sumemos $2ab$ a ambos miembros de la desigualdad

$$a^2+b^2+2ab>4ab$$
$$\frac{a^2+b^2+2ab}{4}>ab$$
$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2>ab$$

Extrayendo la raíz cuadrada positiva de ambos miembros,

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab} \iff \boxed{m_a>m_g}$$

Producto de los *n* primeros términos de una progresión geométrica

Cálculo previo. *Producto de dos términos equidistantes de una progresión geométrica.*

Se establecen los n primeros términos de una progresión geométrica:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, \ldots, a_{n-k+1}, a_{n-1}, a_n .$$

Son términos equidistantes

1.º y n.º
2.º y $(n-1)$.º
3.º y $(n-2)$.º
.....
.....

de modo que puede observarse que la suma de índices siempre es $n+1$. Así, el equidistante de cualquier a_k es a_{n-k+1}.

Calculemos el producto de dos términos equidistantes:

$$\left.\begin{array}{r} a_k=a_1\cdot r^{k-1} \\ a_{n-k+1}=a_1\cdot r^{n-k+1-1} \end{array}\right\} \times$$
$$a_k\cdot a_{n-k+1}=a_1\cdot(a_1\cdot r^{n-1})$$
$$a_k\cdot a_{n-k+1}=a_1\cdot a_n$$

El producto de dos términos equidistantes de una progresión geométrica es constante e igual al producto de los términos extremos considerados.

Ejemplo 37

En la progresión geométrica cuyos diez primeros términos son:

$$\frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128$$

$$\frac{1}{4}\cdot 128 = \frac{1}{2}\cdot 64 = 1\cdot 32 = 2\cdot 16 = 4\cdot 8.$$

Ejercicio 80

Determínese el valor constante del producto de términos equidistantes de la progresión

$$a_n = \left\{\frac{1}{3}\cdot 3^n\right\}$$

en los ocho primeros términos.

Una vez establecido el producto de dos términos cualesquiera, equidistantes de una progresión geométrica, pasamos a calcular el producto de sus n primeros términos.

Sea la progresión geométrica

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n\ .$$

El producto de sus n términos es:

$$P_n = a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot \ldots \cdot a_{n-2}\cdot a_{n-1}\cdot a_n$$

y por conmutatividad también es

$$P_n = a_n\cdot a_{n-1}\cdot a_{n-2}\cdot \ldots \cdot a_3\cdot a_2\cdot a_1$$

$\times$

$$P_n^2 = (a_1\cdot a_n)\cdot(a_2\cdot a_{n-1})\cdot(a_3\cdot a_{n-2})\ \ldots\ (a_n\cdot a_1)$$

Se establece en el segundo miembro n paréntesis, y todos valen lo mismo, como se ha visto antes. De modo que se puede escribir:

$$P_n^2 = (a_1\cdot a_n)^n$$

$$P_n = \sqrt{(a_1\cdot a_n)^n}$$

El producto de los n primeros términos de una progresión geométrica es igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos elevado al número de términos.

Es interesante examinar el caso de que el número de términos considerado sea impar. Entonces existe un término central, que denotamos a_c, que es su propio equidistante de los extremos. Entonces

$$a_c \cdot a_c = a_1 \cdot a_n$$
$$a_c^2 = a_1 \cdot a_n$$

En este caso, la fórmula del producto puede tener la forma

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} = \sqrt{(a_c^2)^n} = \sqrt{(a_c^n)^2} = a_c^n$$

$$\boxed{P_n = a_c^n}$$

Ejercicio 81

Determínese el producto de los diez primeros términos de la progresión geométrica

$$a_n = \left\{ \frac{1}{8} \cdot 2^n \right\}.$$

Ejercicio 82

El término central de una progresión geométrica de once términos es 8. *Determínese el producto de esos once términos.*

Suma de los n primeros términos de una progresión geométrica

Se establecen los n primeros términos de una progresión geométrica

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n .$$

La suma de ellos es

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n . \qquad [3]$$

Si multiplicamos los dos miembros de [3] por la razón r, resulta:

$$r \cdot S_n = a_1 \cdot r + a_2 \cdot r + a_3 \cdot r + \ldots + a_{n-2} \cdot r + a_{n-1} \cdot r + a_n \cdot r \qquad [4]$$

y, según la propiedad fundamental de las progresiones geométricas, se puede escribir la [4] de este modo:

$$r \cdot S_n = a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n + a_n \cdot r \qquad [4']$$

Hagamos la diferencia [3] − [4']:

$$S_n - r \cdot S_n = a_1 - a_n \cdot r$$
$$S_n(1-r) = a_1 - a_n \cdot r$$

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1-r}} \qquad [5]$$

La suma de los n primeros términos de una progresión geométrica es igual al primero menos el último por la razón, dividido por 1 menos la razón.

Ejercicio 83

El quinto término de una progresión geométrica es 4, *y la razón,* 2. *Calcúlense* a_1, a_{11} *y la suma de sus once primeros términos.*

Ejercicio 84

El producto de los cinco primeros términos de una progresión geométrica es 1.

Calcúlense su término central, el término a_3 *y la suma de esos cinco términos, sabiendo que la razón es* 2.

Ejercicio 85

Determínese x, *sabiendo que* $9x$; $7x + 2x^2$; $x + 8x^2$ *son términos consecutivos de una progresión geométrica.*

Ejercicio 86

Una progresión geométrica de términos positivos está formada de modo que cada término es la suma de los dos que le siguen.

Determínese la razón de la progresión.

Ejercicio 87

Determínese la suma de todos los números naturales A, *tales que:*

$$(A = \dot{11}) \wedge (10^3 < A < 10^4).$$

(¡Cuidado! ¿Es progresión geométrica o progresión aritmética?)

Ejercicio 88

Calcúlese la suma de todos los números naturales B, *tales que:*

$$(A = 11^k) \wedge (10^3 < B < 10^6).$$

Ejercicio 89

Se sabe que $a+b+c=30$, *y que la sucesión a, b, c es progresión aritmética, mientras que la a, c, b es una progresión geométrica.*

Determínense esos tres números.

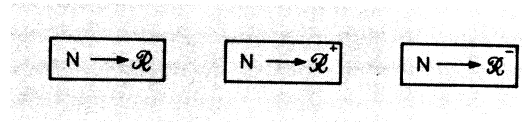
Ejercicio 90

Tres términos consecutivos de una progresión geométrica suman 26. El central, aumentado en cuatro unidades, hace que la proporción se convierta en aritmética.

Calcúlense los tres números.

Progresiones geométricas crecientes, decrecientes, oscilantes; limitadas e ilimitadas

La función exponencial que define una progresión geométrica puede tener por recorrido todo el conjunto real, o bien sólo los reales positivos, o bien exclusivamente los reales negativos, resultando estas tres posibilidades:



Por otra parte, la razón de la progresión puede pertenecer a uno de estos cuatro intervalos abiertos reales:

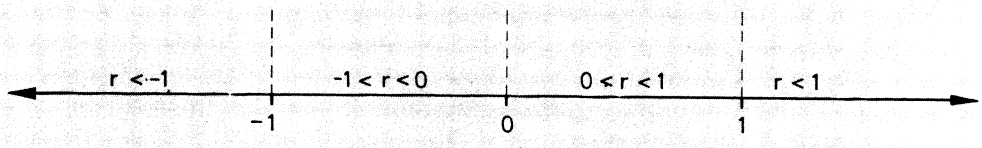


FIG. 1.17.

Las posibles combinaciones de estas seis posibilidades dan estos seis tipos de progresiones geométricas:

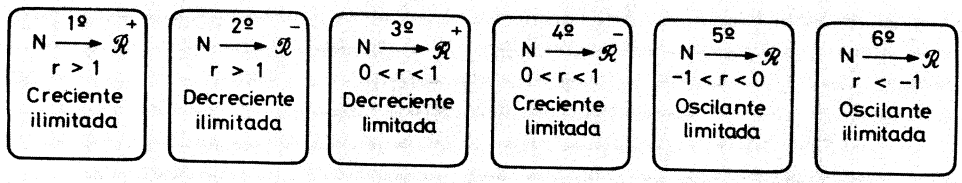
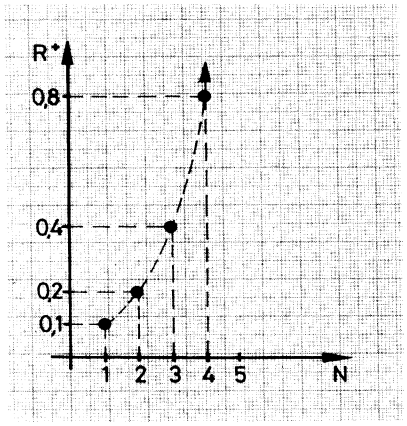


FIG. 1.18.

¿Qué describen los adjetivos de cada uno de los cuadros? Lo que se explica a continuación.



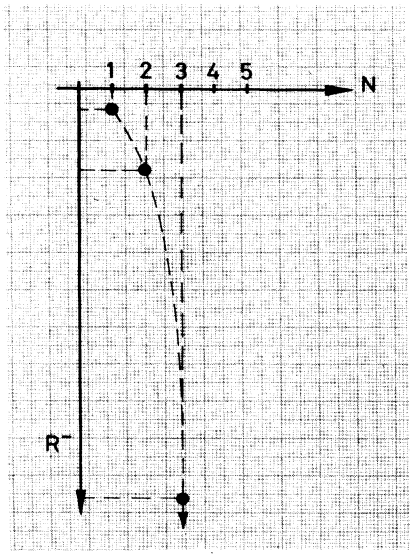
1) 0,1; 0,2; 0,4; 0,8; 1,6; ...

$\boxed{r>1}$ $\quad r=2$

FIG. 1.19.

— Cada término es mayor que cualquiera de los anteriores: **creciente.**

— La suma de sus infinitos términos no tiene límite: **ilimitada.** Cuantos más términos se toman más grande es la suma.



2) $-\frac{1}{125}, -\frac{1}{25}, -\frac{1}{5}, -1, -5, \ldots$

$\boxed{r>1}$ $\quad r=5$

FIG. 1.20.

— Cada término es menor que cualquiera de sus anteriores: **decreciente.**

— La suma de sus infinitos términos no tiene límite: **ilimitada.** Cuantos más términos se tomen, más grande es el valor absoluto de la suma.

3) 81, 27, 9, 3, 1, 1/3, 1/9, ...

$\boxed{0<r<1}$ $\quad r=1/3$

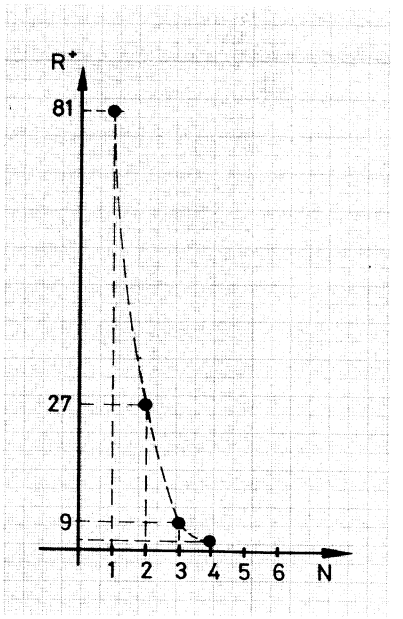


FIG. 1.21.

— Cada término es menor que cualquiera de sus anteriores: **decreciente.**

— La suma de sus infinitos términos tiene un valor determinado: **limitada.**

En efecto: la fórmula [5] puede escribirse así

$$S_n=\frac{a_1}{1-r}-\frac{a_n r}{1-r}$$

A medida que n aumenta, a_n disminuye, y, en consecuencia, la segunda fracción del segundo miembro se hace cada vez más pequeña.

Si n tiende a infinito, entonces a_n tiende a cero:

$$n\to\infty \implies a_n\to 0 \implies \frac{a_n r}{1-r}\to 0;$$

y así queda establecido el *límite de la suma* de los infinitos términos de una progresión geométrica decreciente en $\mathfrak{R}^+$.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{a_1}{1-r}.}$$

que se lee:

> El límite de la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica decreciente en $\mathcal{R}^+$ es igual al primer término dividido por 1 menos la razón.

4) $-0{,}32,\ -0{,}16,\ -0{,}08,\ -0{,}04,\ \ldots$

$0<r<1$ $\qquad r=1/2.$

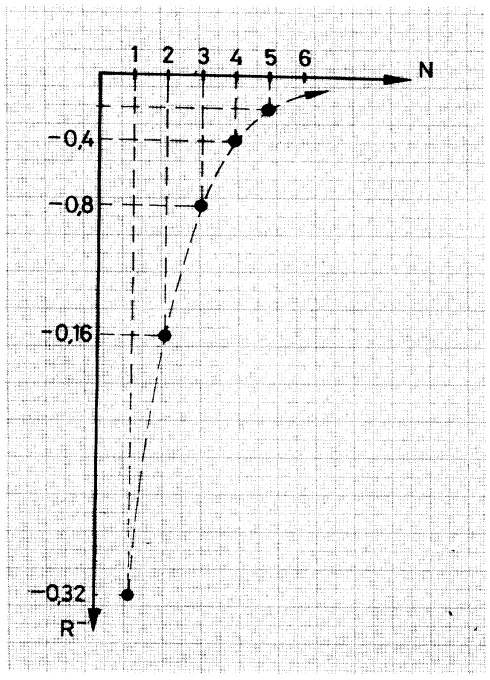


FIG. 1.22.

— Cada término es mayor que cualquiera de los que le preceden: **creciente.**

— La suma de sus infinitos términos tiene un valor determinado: **limitada.**

En efecto:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{-0{,}32}{1-1/2} = 0{,}64$$

5) $+16;\ -8;\ +4;\ -2;\ +1;\ \ldots$

$-1<r<0$ $\qquad r=-1/2$

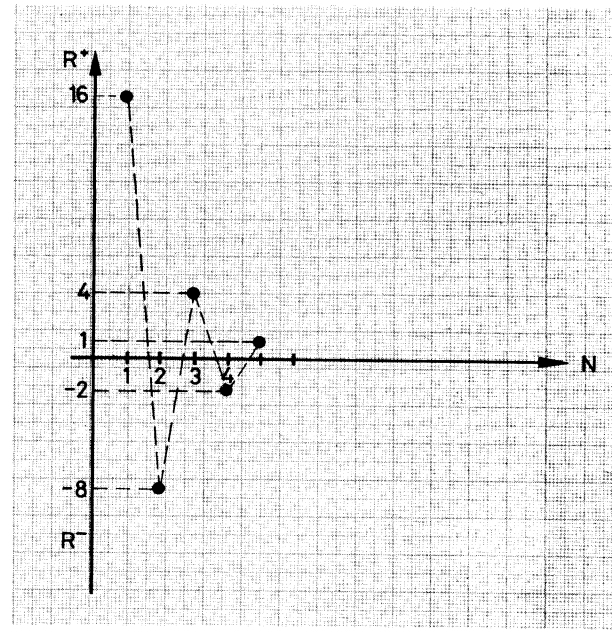


FIG. 1.23.

— Cada término pertenece alternativamente a $\mathcal{R}^+$ o a $\mathcal{R}^-$: **oscilante.**

— Está formada por dos progresiones: una del tipo 3) y otra del tipo 4), ambas con sumas limitadas; luego la suma de sus infinitos términos tiene un valor determinado: **limitada.**

6) $+0{,}001\,;\ -0{,}01\,;\ +0{,}1\,;\ -1\,;\ +10,\ -100\,;\ \ldots$

$\boxed{r<-1}$ $\quad r=-10$

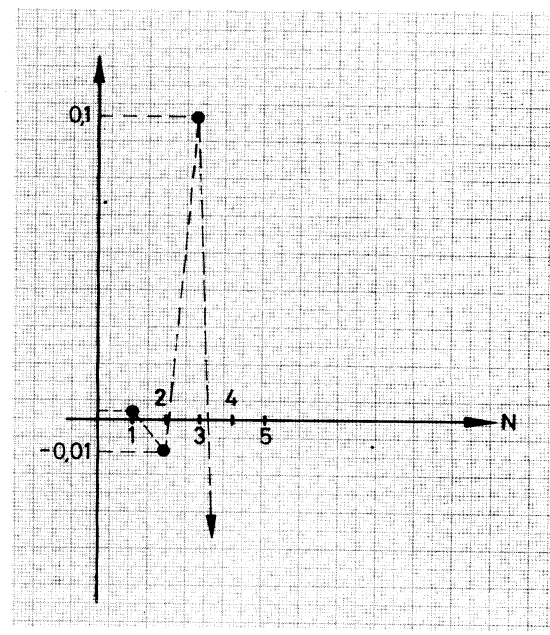


FIG. 1.24.

— Cada término pertenece alternativamente a $\mathfrak{R}^+$ o a $\mathfrak{R}^-$: **oscilante.**

— Está formada por dos progresiones: una del tipo 1) y otra del tipo 2). Es **ilimitada.**

Ejercicio 91

Establézcanse las clases a las que pertenecen cada una de estas progresiones y calcúlese el límite de la suma de sus infinitos términos en las que proceda.

a) $10^{-3}; \ -10^{-2}; \ 10^{-1}; \ -10^{0}; \ 10^{1}; -10^{2}; \ \ldots$

b) $+0{,}16; \ -0{,}08; \ +0{,}04; \ -0{,}02; \ +0{,}01; \ \ldots$

c) $-9; \ -3; \ -1; \ -1/3; \ -1/9; \ \ldots$

d) $32; \ 16; \ 8; \ 4; \ \ldots$

e) $-0{,}001; \ -0{,}01; \ -0{,}1; \ -1; \ -10; \ \ldots$

f) $5; \ 10; \ 20; \ 40; \ 80; \ \ldots$

El caso 3) de las progresiones geométricas ilimitadas decrecientes da lugar a infinidad de problemas interesantes, como puede ser el

Ejemplo 38

Uniendo los puntos medios de los lados de un triángulo equilátero de lado a, se obtiene otro; y uniendo los puntos medios de los lados de este nuevo triángulo se obtiene otro triángulo, también equilátero, y así se prosigue indefinidamente.

— El $\overset{\triangle}{MNP}$ es semejante al $\overset{\triangle}{ABC}$ de razón de semejanza $k = 1/2$.

— Entonces, la razón de sus áreas es

$$k^2 = 1/4.$$

— La sucesión de áreas

$$S_1, \ S_2, \ S_3, \ S_4, \ \ldots$$

es una progresión geométrica de razón $r = 1/4$.

— $S_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{4} a^2$.

— $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{4} a^2}{1 - 1/4} = \dfrac{\sqrt{3}\, a^2}{3}$

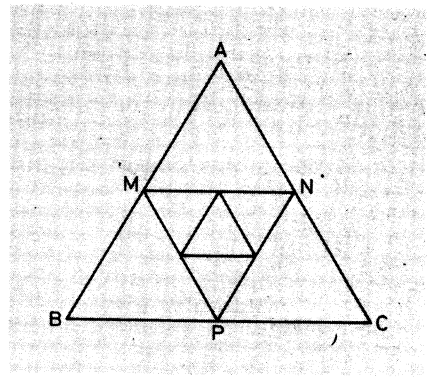


FIG. 1.25.

Ejercicio 92

Uniendo los puntos medios de los lados de un cuadrado de perímetro 16 *m se obtiene otro cuadrado sobre el que vuelve a repetirse la construcción, y así indefinidamente.*

Determínese la suma de todas las áreas de esos cuadrados.

Ejercicio 93

En un círculo de radio R se inscribe un triángulo equilátero; en éste se inscribe un círculo, y en ese círculo se inscribe un nuevo triángulo equilátero, realizándose el proceso indefinidamente.

Determínense:

a) *el límite de la suma de las superficies circulares,*

b) *el límite de la suma de las longitudes de todas las circunferencias.*

Otra aplicación interesante del límite de la suma de las progresiones geométricas decrecientes en $\mathbb{R}^+$ es la determinación de las fracciones generatrices de los decimales periódicos.

Ejemplo 39

¿Cuál es la fracción generatriz del decimal periódico 0,525252...?

Obsérvese que

$$\begin{aligned} 0{,}525252\ldots &= 0{,}52 + 0{,}0052 + 0{,}000052 + \ldots \\ &= 52 \cdot 10^{-2} + 52 \cdot 10^{-4} + 52 \cdot 10^{-6} + \ldots \end{aligned}$$

Se trata de encontrar el límite de la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de razón $r = 10^{-2}$ y primer término $a_1 = 52 \cdot 10^{-2}$.

Así es que:

$$0{,}525252\ldots = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{52\times 10^{-2}}{1-10^{-2}} = \frac{0{,}52}{1-0{,}01} = \frac{0{,}52}{0{,}99} = \frac{52}{99},$$

lo que coincide con aquella regla de la Aritmética tradicional que dictaba: «La fracción generatriz de una decimal periódica es igual al primer periodo dividido por tantos nueves como cifras tiene el periodo.»

Ejemplo 40

Determínese la fracción generatriz de la periódica mixta $0{,}17\widehat{5}$:

$$0{,}17\widehat{5} = 0{,}17 + 0{,}005 + 0{,}0005 + 0{,}00005 + \ldots = 0{,}17 + \frac{0{,}005}{1-0{,}1} = 0{,}17 + \frac{0{,}005}{0{,}9} = \frac{0{,}153 + 0{,}005}{0{,}9} = \frac{79}{450}$$

Como curiosidad, vamos a operar de modo que se ponga de manifiesto la regla que para este caso daba la Aritmética clásica: «La fracción generatriz de una periódica mixta es igual al anteperiodo seguido del primer periodo menos el anteperiodo, dividido por tantos nueves como tiene el periodo seguidos de tantos ceros como cifras tiene el anteperiodo»:

$$0{,}17\widehat{5} = 0{,}17 + \frac{0{,}005}{1-0{,}1} = \frac{0{,}17(1-0{,}1)+0{,}005}{1-0{,}1} = \frac{0{,}17-0{,}017+0{,}005}{1-0{,}1} = \frac{0{,}175-0{,}017}{0{,}9} = \frac{175-17}{900} = \frac{158}{900} = \frac{79}{450}$$

Ejercicio 94

Calcúlense las fracciones generatrices de las decimales periódicas:

a) $0{,}\widehat{36}$; *b)* $0{,}43\widehat{21}$.

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 1.3

53. $a_5 = 6/25$.

54. $a_2 = 5/2$; $a_4 = 9/4$; $a_6 = 13/6$.

55. *a)* $a_n = \dfrac{2n-1}{2n}$;

b) $a_n = \dfrac{1}{n}$;

c) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$;

d) $a_n = \dfrac{n}{n!} = \dfrac{1}{(n-1)!}$.

56. $a_n = -2n - 1/2$.

57. $a_{15} = 89/10$.

58. $a_n = n/3 - 19/12$.

59. $a_{1000} = 995/2$.

60. $a_n = -4n + 24$.

61. $P = 12 + 16 + 20 = 48$ cm; $A = 1/2 \cdot 12 \cdot 16 = 96$ cm^2;
$S = \pi \left(\frac{20}{2}\right)^2 = 100\pi$ cm^2.

62. $\{7, 5, 3, 1, -1\}$.

63. $\{9, 12, 15, 18, 21, 24\}$.

64. $n = 23$.

65. $\left.\begin{matrix} a_1 = -3 \\ a_{100} = 195 \end{matrix}\right\}$ $a_1 + a_n = 192$.

66. $S_{30} = 780$.

67. $S_{15} = 6$.

68. $A = 25^\circ$; $B = 60^\circ$; $C = 95^\circ$.

69. 70°, 90°, 110°, 130°, 150°, 170°.

70. 2, 4, 8, 16, 32.

71. $-1/2$, 1, -2, 4, -8.

72. $a_n = 3 \cdot (\sqrt{3})^n$; $a_8 = 243$.

73. $r = 1/8$; $a_6 = 1/1024$.

74. $a_7 = 50$.

75. $m = 3$; $r = \pm 2$.

76. $h = 4$ cm.

77. $S = 20$ cm^2.

78. $m_a = 15$; $m_g = 9$.

79. $m_a = 62{,}6$; $m_g = 5$.

80. $\left.\begin{matrix} a_1 = 1 \\ a_8 = 2\,187 \end{matrix}\right\}$ $a_1 \cdot a_8 = 2\,187$.

81. $P_{10} = 2^{25}$.

82. $P_{11} = 2^{33}$.

83. $a_1 = 1/4$; $a_{11} = 256$; $S_{11} = 2\,047/4$.

84. $a_c = a_3 = 1$; $S_5 = 31/4$.

85. $x = 10$.

86. $r = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

87. $S = 4_1504.500$.

88. $S = 177.023$.

89. $a = 40$; $b = 10$; $c = -20$.

90. 2, 6, 18.

91. *a)* oscilante ilimitada;
b) oscilante limitada, $S = 8/75$;
c) creciente limitada, $S = -27/2$;
d) decreciente limitada, $S = 64$;
e) decreciente ilimitada;
f) creciente ilimitada.

92. $\lim_{n \to \infty} S_n = 32 \text{ m}^2$.

93. $\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{4\pi}{3} R^2$; $\lim_{n \to \infty} L_n = 4\pi R$.

94. *a)* 4/11; *b)* 1 439/3 330.

1.4

Matemática comercial

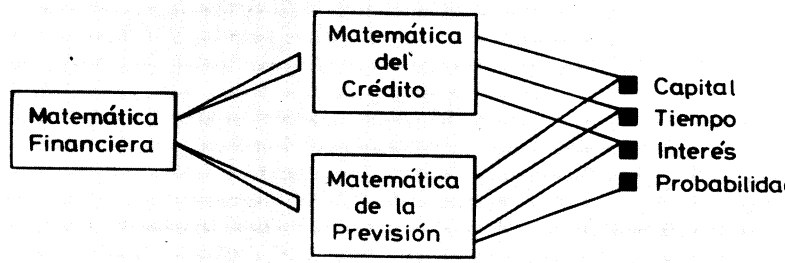
1. INTRODUCCION

En todas las cuestiones referentes a Matemática financiera son cuatro las variables fundamentales a las que hay que atender:

— capital,
— tiempo,
— interés, y
— probabilidad.

En una parte de esta Matemática financiera, las prestaciones (los pagos) se verifican en fechas fijas, denominadas «vencimientos»; en estos cálculos no es necesaria la probabilidad, y la llamada *Matemática del Crédito* sólo utiliza las variables capital, tiempo e interés.

Pero hay otra parte de la Matemática financiera que se puede llamar *Matemática de la previsión,* en la que la verificación de prestaciones (pagos) está ligada a sucesos aleatorios *, por lo que una de sus variables más importantes es la Probabilidad (seguros de vida, etc.).



* Sucesos posibles de los que no se puede asegurar su verificación.

¿Qué es interés? Interés es el dinero que produce un *capital* en el tiempo de su uso.

¿Por qué un capital ha de producir interés? Así como el que disfruta de una casa está obligado, en su día, a devolver el inmueble, además de haber satisfecho una cuota de alquiler, así un capital prestado, aparte de su devolución íntegra al final del préstamo, exige la entrega de una cantidad que es el *interés,* no sólo a título de «alquiler», sino también como «prima de seguro» que cubre el riesgo de pérdida o depreciación.

Operación financiera es el intercambio no simultáneo de dos o más capitales, cuyos pagos correspondientes pueden ser o no parcial o totalmente aleatorios.

Principio de equivalencia financiera. Toda operación financiera se lleva a cabo entre dos personas o entidades; pues bien:

> Una operación financiera que se desarrolla en un intervalo de tiempo ha de ser tal, que el valor en cada fecha de ese intervalo de las prestaciones y contraprestaciones (pasadas, presentes y futuras) de los dos actuantes coincidan.

2. INTERES SIMPLE

Recuérdese de la E. G. B. que, al convenir en que el interés producido, I, sea directamente proporcional al capital, c, y al tiempo, t, resulta:

$$I = i \cdot c \cdot t \qquad [1]$$

La constante de proporcionalidad, i, se denomina *tanto por uno* y, obviamente, representa el interés que produce la unidad monetaria del capital (1 peseta, por ejemplo) en la unidad de tiempo, que se mide en años.

Si, como es frecuente, el dato es el *tanto por ciento* (%), R, entonces es claro que $i = R/100$, y la [1] se escribe

$$I = \frac{R \cdot c \cdot t}{100} \qquad [2]$$

Cuando el cálculo se realiza en meses, como el año tiene doce meses, la [1] toma la forma

$$I = i \cdot c \cdot \frac{m}{12} \qquad [3]$$

en la que m indica el número de mensualidades.

De igual modo, si se hace una capitalización diaria, resulta

$$I = i \cdot c \cdot \frac{n}{360} \qquad [4]$$

ya que el año comercial se estima en 360 días. Si es el año civil el que se considera, sus 365 días convierten la [4] en

$$I = i \cdot c \cdot \frac{n}{365} \qquad [5]$$

Ejemplo 41

¿Qué interés producen 30 000 pesetas en tres semestres, puestas al 6 por 100 de interés simple?

$$I = 0{,}06 \times 30\,000 \times \frac{18}{12} = 2\,700 \text{ pesetas.}$$

Ejercicio 95

Determínese cuánto han rentado 120 000 *pesetas, puestas durante* 45 *días al* 5 *por* 100 *de interés simple.*

Si se desea saber en qué se ha convertido un capital c, al cabo de t años, impuesto al R por 100, bastará acumular a ese capital el interés producido. Así, denotando C al capital acumulado,

$$C = I + c;$$
$$C = i \cdot c \cdot t + c; \qquad [6]$$
$$C = c \cdot (i \cdot t + 1). \qquad [6']$$

Comparando la [6] con la fórmula del término general de una progresión aritmética, se observa:

$$C = i \cdot c \cdot t + c$$
$$a_n = d \cdot n + q$$

Siendo, como lo son, i y c constantes, resulta que se trata de una progresión aritmética de diferencia

$$d = i \cdot c;$$

y de q

$$q = c;$$

y, como allí, es posible una representación gráfica afín de t en C ($t \subset N$).

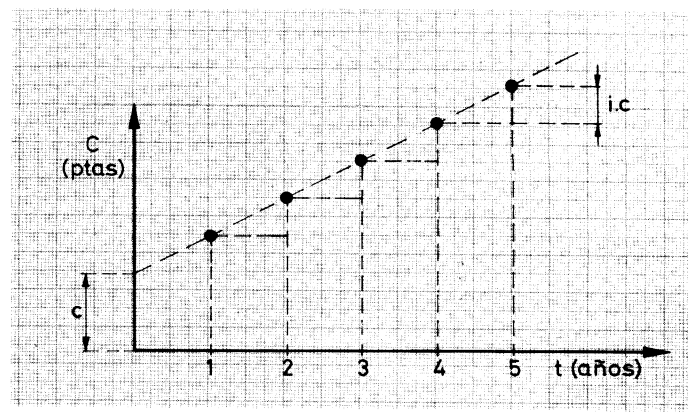


FIG. 1.26.

A fin de evitarse el cálculo engorroso con las fórmulas del interés simple, han sido varios los métodos que se han ideado; pero hoy lo más cómodo es utilizar las tablas de interés simple. Estas tablas dan lo que produce una unidad monetaria (1 peseta, por ejemplo) hasta cada uno de los 365 días del año natural, impuesta a distintos i (tabla I).

Para determinar, pues, la renta de un capital de c pesetas, basta multiplicar el número encontrado en la tabla por c.

Si el interés no fuera uno de los tabulados, puede fácilmente componerse mediante adición de los que se disponga. Así, si se desea saber lo que renta 1 peseta al 7,25 por 100 en 60 días, bastará sumar lo que renta al 4 por 100, al 3 por 100 y al 1/4 por 100:

$$0{,}0065754 + 0{,}0049315 + 0{,}0004110 = 0{,}0119179$$

Ejemplo 42

¿Cuánto producen 328 000 pesetas al 6 por 100 de interés simple durante 90 días?

1 peseta produce 0,0147946 pesetas

$I = 0{,}0147946 \times 328\,000 = 4\,852{,}63$ pesetas.

Ejercicio 96

¿Qué interés simple producen 600 000 *pesetas, en* 60 *días, al* 8 *por* 100?

3. INTERES COMPUESTO

En el cálculo del interés simple, cada año se calculan los intereses del capital inicial. Pero parece lógico que el interés producido ya en el primer año se sume al propio capital, y todo ese dinero es el que habrá de producir el interés durante el segundo año, y así sucesivamente. De este modo, el capital se acumula como se indica:

Capital inicial	c
Final del primer año	$c + c \cdot i \cdot 1 = c(1+i)$
Final del segundo año	$c(1+i) + [c(1+i)]i \cdot 1 = c(1+i)^2$
Final del tercer año	$c(1+i)^2 + [c(1+i)^2]i \cdot 1 = c(1+i)^3$
... ...	... ...
... ...	... ...
Final del $t.^{o}$ año	$c(1+i)^t$

La fórmula que resulta para el capital acumulado al cabo de t años es

$$\boxed{C = c(1+i)^t} \qquad [7]$$

Si la capitalización, en lugar de ser anual, es por fracciones de año, por ejemplo, trimestral (1/4 de año), semestral (1/2 de año), diaria (1/360 de año), la [7] toma la forma

$$C = c(1 + i/n)^{t \cdot n} \qquad [7']$$

Ejemplo 43

¿En qué se convierten 5 000 pesetas al cabo de tres años, al 5 por 100 de interés anual?

$$C = 5\,000 \times (1 + 0{,}05)^3$$
$$C = 5\,000 \times 1{,}157725 = 5\,788{,}63 \text{ pesetas.}$$

Ejemplo 44

¿Y si en el anterior ejemplo la capitalización es trimestral? Entonces ha de aplicarse:

$$C = c(1 + i/4)^{4t}$$
$$C = 5\,000 \times (1 + 0{,}0125)^{12} = 5\,803{,}77 \text{ pesetas.}$$

Ejercicio 97

¿Cuál es el tanto por ciento anual de interés compuesto al que se ha colocado un capital de 4 900 *pesetas, que en dos años se ha convertido en* 5 041 *pesetas?*

Al comparar la [7] con la fórmula del término general de una progresión geométrica, se observa:

$$C = c(1 + i)^t$$
$$a_n = p \cdot r^n$$

Así, pues, las diversas acumulaciones periódicas forman una progresión geométrica de razón $(1 + i)$.

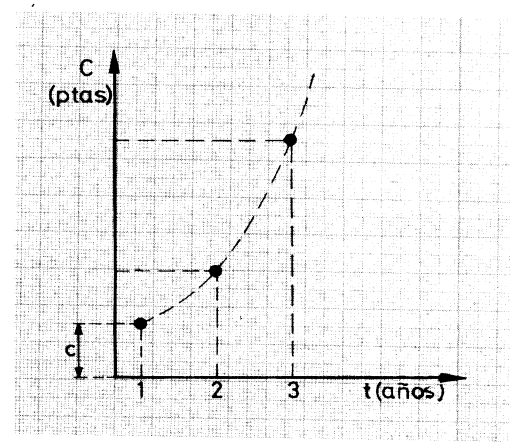


FIG. 1.27.

Al igual que en el tema de progresiones, aquí es posible una representación de la función exponencial $t \to C$ $(t \subset N)$.

Al estudiar el ejemplo 44, tal vez se haya preguntado el alumno cómo se ha hecho esa potencia 12, que ahí aparece. Se ha utilizado una máquina calculadora. También se podía haber hecho por un cálculo logarítmico, cosa que no está al alcance de este curso. Entonces, ¿cómo se pueden resolver estos problemas en este nivel? Utilizando las tablas financieras del modo que se explica en los ejemplos que siguen.

Ejemplo 45

Determínese en qué se han convertido, al cabo de doce años, 200 000 pesetas, impuestas al 6 por 100 de interés compuesto anual.

La tabla II proporciona como «montante» de 1 peseta, al 6 por 100 en doce años, 2,01219647 pesetas, lo que quiere decir que esa peseta se ha convertido en doce años en ese número de pesetas. Por tanto, el montante de las 200 000 pesetas, al final de los doce años, es:

$$C = 200\,000 \times 2{,}01219647 = 402\,429{,}29 \text{ pesetas.}$$

Ejercicio 98

Determínese la acumulación de 500 000 *pesetas en cinco años, capitalizadas al* 6,5 *por* 100 *anual.*

Ejemplo 46

¿Qué capital inicial se necesita para conseguir 500 000 pesetas, al cabo de treinta años, con capitalización compuesta al 8,5 por 100?

$$C = c(1+i)^t$$

$$500\,000 = c \times (1{,}085)^{30}$$

$$c = 500\,000 \times \frac{1}{1{,}085^{30}}.$$

La tabla III da, para $\frac{1}{1{,}085^{30}}$, el valor 0,08651828; entonces,

$$c = 500\,000 \times 0{,}08651828 = 43\,259{,}40 \text{ pesetas.}$$

Ejercicio 99

¿Qué capital se impuso, hace treinta y dos años, al 8 *por* 100 *de capitalización compuesta, si hoy se han obtenido* 10 *millones de pesetas?*

Ejemplo 47

¿A qué tanto por ciento se impuso, hace treinta y dos años, un capital de 852 000,50 pesetas, si se han convertido en 10 millones?

$$C=c(1+i)^t \Longrightarrow \frac{1}{(1+i)^t}=\frac{c}{C}$$

$$(1+i)^{-t}=\frac{852\,000{,}50}{10^7}=0{,}08520005.$$

Basta mirar la tabla III, en la fila del periodo $t=32$, a qué R corresponde el número hallado:

$$0{,}08520005 \Longrightarrow 8 \text{ por } 100$$

Puede usarse también la tabla II, buscando en ella $\frac{C}{c}=(1+i)^t$, si se prefiere.

Ejercicio 100

¿A qué tanto por ciento de capitalización anual se impusieron 432 591,40 *pesetas, si en treinta años se han convertido en* 5 *millones?*

Ejemplo 48

No siempre da la casualidad de que al buscar en la tabla III el valor de $(1+i)^{-t}$ se encuentre tabulado exactamente, como sucedió en el ejemplo 47. Lo frecuente es lo contrario, y, entonces, se debe actuar como se hace en este ejemplo: por interpolación proporcional, método aproximado que es suficiente para las aplicaciones.

¿A qué tanto por ciento se ha colocado un capital de 1 millón de pesetas, que se han convertido en 12 millones en treinta años?

Entendiendo que el i buscado está comprendido entre dos de las tablas, i_1 e i_2,

$$i_1<i<i_2,$$

también sucede que

$$(1+i_1)^t<(1+i)^t<(1+i_2)^t.$$

Admitiendo que las diferencias son proporcionales, puede escribirse con suficiente aproximación que

$$\frac{i-i_1}{i_2-i_1}=\frac{(1+i)^t-(1+i_1)^t}{(1+i_2)^t-(1+i_1)^t} \qquad [7'']$$

$$(1+i)^{30}=\frac{C}{c}=\frac{12\,000\,000}{1\,000\,000}=12.$$

En la tabla II se encuentra

$$\text{para } i_1 = 8{,}5 \rightarrow 1{,}085^{30} = 11{,}55825164$$
$$\text{para } i_2 = 9 \rightarrow 1{,}090^{30} = 13{,}26767847$$

Aplicando [7''],

$$\frac{i - 0{,}085}{0{,}090 - 0{,}085} = \frac{12 - 11{,}55825164}{13{,}26767847 - 11{,}55825164}$$
$$i = 0{,}0863 \Longrightarrow R \simeq 8{,}63 \text{ por } 100$$

Ejercicio 101

¿A qué tanto por ciento de interés compuesto se han capitalizado 978 000 *pesetas, que en veinte años se han convertido en* 4 890 000 *pesetas?*

Ejemplo 49

¿Cuánto tiempo han estado impuestas 850 000 pesetas, que se han convertido, al 8 por 100, en 10 millones?

$$\frac{10\,000\,000}{850\,000} = 1{,}08^t = 11{,}76477058$$

En la tabla II, en la columna del 8 por 100 se lee:

$$1{,}08^{32} = 11{,}73708300$$
$$1{,}08^{33} = 12{,}67604963.$$

Usando la aproximación proporcional:

$$\frac{t - 32}{33 - 32} = \frac{11{,}76477058 - 11{,}73708300}{12{,}67604963 - 11{,}73708300}$$
$$t = 32{,}02 \text{ años} \simeq 32 \text{ años y } 8 \text{ días.}$$

Ejercicio 102

¿En cuánto tiempo se duplica un capital colocado al 6 *por* 100 *de interés compuesto?*

4. ANUALIDADES DE CAPITALIZACION

Se denominan «anualidades de capitalización» a una sucesión de pagos iguales, a, realizados *al principio de cada año,* con el fin de constituir al cabo de t años un capital C.

Para establecer el capital conseguido al cabo de los t años, habrán de

sumarse cada una de las anualidades pagadas acumuladas con sus intereses durante el tiempo que va desde su abono hasta el final de la capitalización. Así,

$$\left.\begin{array}{l}\text{La primera anualidad se ha convertido, al cabo de } t \text{ años, en } \ldots \quad a(1+i)^t \\ \text{La segunda anualidad se ha convertido, al cabo de } (t-1) \text{ años, en } \quad a(1+i)^{t-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{La } t.^{\text{a}} \text{ anualidad se ha convertido, al cabo de un año, en } \ldots\ldots\ldots \quad a(1+i)\end{array}\right\} +$$

$$C = a(1+i)[1+(1+i)^1+(1+i)^2+\ldots+(1+i)^{t-1}].$$

Los términos del corchete no son más que los de una progresión geométrica de t términos, de primer término 1 y de razón $(1+i)$. Así, aplicando la fórmula de la suma, es

$$C = a(1+i)\cdot\frac{1-(1+i)^{t-1}\cdot(1+i)}{1-(1+i)};$$

$$C = \frac{a\cdot(1+i)\cdot[1-(1+i)^t]}{-i};$$

o bien,

$$C = \frac{a(1+i)[(1+i)^t-1]}{i} \qquad [8]$$

Ejemplo 50

Pagando 2 000 pesetas, al 3 por 100 de interés compuesto anual, durante veinticinco años, ¿qué capital llega a formarse?

$$C = \frac{2\,000\times 1{,}03\times(1{,}03^{25}-1)}{0{,}03}$$

Usando calculadora o tablas logarítmicas se obtiene:

$$C = 75\,106{,}08 \text{ pesetas.}$$

Con tablas financieras, usando la tabla IV, resulta:

$$C = 2\,000\times 1{,}03\times 36{,}45926432 = 75\,106{,}08 \text{ pesetas.}$$

Ejercicio 103

Determínese, usando las tablas, el capital que se consigue en veinticuatro años con una anualidad de 5 000 *pesetas, al* 3,5 *por* 100 *de interés anual.*

Ejemplo 51

¿Qué anualidad ha de pagarse, durante veinte años, al 8 por 100, para conseguir un capital de 2 millones de pesetas?

$$a = \frac{c\cdot i}{(1+i)\cdot[(1+i)^t-1]} = \frac{2\times 10^6\times 0{,}08}{1{,}08\times(1{,}08^{20}-1)}$$

El cálculo, realizado con calculadora o logaritmos, resulta:

$$a = 40\,506{,}33 \text{ pesetas.}$$

Usando las tablas financieras se trabaja así. La tabla V puede usarse, pues basta restar i a sus valores y multiplicar la diferencia por $1/(1+i)$ para obtener los valores de

$$\frac{i}{(1+i)[(1+i)^t - 1]};$$

entonces, es suficiente multiplicar por c para obtener a:

$$\alpha_{\overline{8}|} = 0{,}10185221; \quad \alpha_{\overline{8}|} - i = 0{,}02185221; \quad (\alpha_{\overline{8}|} - i) \cdot \frac{1}{1+i} = 0{,}0201030332$$

$$a = 2 \times 10^6 \times 0{,}0201030322 = 40\,506 \text{ pesetas.}$$

Ejercicio 104

Determínese, usando las tablas, la anualidad que ha de pagarse durante veinticinco años al 3 *por* 100 *de interés compuesto, para formar un capital de* 77 000 *pesetas.*

Ejemplo 52

¿Durante cuántos años han de pagarse 2 000 pesetas para que, al 3 por 100 de capitalización anual, se consiga un capital de 77 000 pesetas?

$$\frac{C \cdot i}{a(1+i)} = (1+i)^t - 1 \Longrightarrow \frac{C \cdot i}{a(1+i)} + 1 = (1+i)^t \qquad [9]$$

A partir de aquí, sólo sería posible un cálculo semilogarítmico, que permitiría «despejar el t».

Sin embargo, el uso de las tablas financieras de capitalización permite su cálculo de este modo:

De la fórmula [9], a la que hemos llegado, despejamos en el segundo miembro lo que tabula la tabla IV; así:

$$\frac{C}{a(1+i)} = \frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

$$\frac{77\,000}{2\,000 \times 1{,}03} = \frac{(1+i)^t - 1}{i} = 37{,}37864.$$

Este resultado está comprendido entre los que corresponden a veinticinco y a veintiséis años.

En la práctica, es suficiente esta acotación de tiempos. Si se decide un $t = 25$ años, el capital, en lugar de ser 77 000 pesetas, será algo menor, en una

cantidad no significativa; si se establece un $t=26$ años, ello significa que se capitalizará una cantidad algo superior a 77 000 pesetas.

Si se exige mayor exactitud, lo cual no es corriente, es posible todavía variar la anualidad, o bien, capitalizar veinticinco anualidades de 2 000, y una última, a calcular, que determina exactamente las 77 000 pesetas deseadas.

Ejercicio 105

Determínense, usando las tablas de capitalización, cuántas anualidades de 10 000 *pesetas han de pagarse para capitalizar, al* 3,5 *por* 100, 500 000 *pesetas.*

5. ANUALIDADES DE AMORTIZACION

Se denominan «anualidades de amortización» a una sucesión de pagos iguales, realizados *al final de cada año,* con el fin de enjugar, al cabo de t años, una deuda contraída.

Al finalizar esos t años, la deuda D, contraída hoy, se ha convertido, al i por 1, en

$$D(1+i)^t$$

La suma de las amortizaciones ha de ser igual a la deuda contraída, acumulada a sus intereses

La primera anualidad se ha convertido, al cabo de $(t-1)$ años en $a(1+i)^{t-1}$
La segunda anualidad se ha convertido, al cabo de $(t-2)$ años en $a(1+i)^{t-2}$
... ...
... ...
La $t.^a$ anualidad, pagada al final del último año, es ... ... a

$$D(1+i)^t = a[(1+i)^{t-1}+(1+i)^{t-2}+\ldots+1]$$

El corchete no es más que la suma de los t términos de una progresión geométrica, de primer término 1 y de razón $(1+i)$. De modo que, aplicando la fórmula de la suma, resulta:

$$D\cdot(1+i)^t = a\cdot\frac{1-(1+i)^{t-1}(1+i)}{1-(1+i)};$$

$$D = a\cdot\frac{1-(1+i)^t}{-i\cdot(1+i)^t};$$

o lo que es igual:

$$\boxed{D = a\cdot\frac{(1+i)^t-1}{i(1+1)^t}} \qquad [10]$$

La [10] puede tomar una forma más operativa

$$D = a \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^t}}{i} = a \cdot \frac{1-(1+i)^{-t}}{i} \qquad [10'],$$

cuyos valores proporcionan las tablas financieras.

Ejemplo 53

¿A qué deuda se puede hacer frente, en veintitrés años, al 3 por 100, pagando 1 000 pesetas anuales?

$$D = a \cdot \frac{1-(1+i)^{-t}}{i}; \qquad D = 1\,000 \times \frac{1-(1{,}03)^{-23}}{0{,}03}$$

Según la tabla VI,

$$D = 1\,000 \times 16{,}44360839 = 16\,443{,}61 \text{ pesetas.}$$

Ejercicio 106

¿Qué deuda se amortiza en veinticuatro años, pagando 1 000 *pesetas anuales, al* 3 *por* 100?

Ejemplo 54

¿Cuál es la anualidad necesaria para amortizar en veinticinco años una deuda de 2 millones de pesetas, contraída al 3,5 por 100?

De la [10'] se despeja a

$$a = D \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-t}};$$

y, según la tabla V,

$$a = 2{,}000\,000 \times 0{,}06067404$$
$$a = 121\,348{,}60 \text{ pesetas.}$$

Ejercicio 107

Determínese el pago anual que es necesario para amortizar una deuda de 5 *millones de pesetas, en diez años, al* 6 *por* 100.

Ejemplo 55

¿Cuántos años se necesitan para amortizar una deuda de 16 800 dólares, contraída al 3 por 100 anual, con pagos de 1 000 dólares?

De la [10'] despejamos lo que nos tabula la tabla VI:

$$\frac{D}{a}=\frac{1-(1+i)^{-t}}{i}; \qquad \frac{16\,800}{1\,000}=16{,}8.$$

Este resultado está comprendido entre el que corresponde a veintitrés y a veinticuatro años.

Como ocurría en capitalización, si procede, se modifica la anualidad o el montante del empréstito; o lo que es más frecuente, la última anualidad, a fin de que la amortización resulte exacta.

Ejercicio 108

¿En cuántos años se amortiza un empréstito de 5 *millones de pesos, emitido al* 7 *por* 100, *con anualidades de* 700 000 *pesos?*

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 1.4

95. $I=750$ pesetas.

96. $I=7\,890{,}48$ pesetas.

97. $R=1{,}4$ por 100.

98. $C=685\,043{,}33$ pesetas.

99. $c=852\,000{,}50$ pesetas.

100. $R=8{,}5$ por 100.

101. $R=8{,}38$ por 100.

102. $t=11$ años y 292 días.

103. $C=189\,749{,}28$ pesetas.

104. $a=2\,050{,}43$ pesetas.

105. $t=43$ años.

106. $D=16\,935{,}54$ pesetas.

107. $a=700\,000$ pesetas.

108. $t=10$ u 11 años.

TABLA I *(fragmento)*

Interés simple de la unidad monetaria: $\left(i \cdot \frac{n}{365}\right)$

n	$i \cdot 100$							
(días)	1/4	1/2	1	2	3	4	5	6
56	836	671	5342	0685	6028	1370	6712	2055
57	904	808	5616	1233	6850	2466	8082	3699
58	973	945	5890	1781	7672	3562	9452	5343
59	0,000 4041	0,000 8082	6164	2329	8494	4658	0,008 0822	6987
60	110	219	6438	2877	9315	5754	2192	8630
61	178	356	6712	3425	0,005 0137	6850	3562	0,010 0274
62	247	493	6986	3973	0959	7946	4932	1918
63	315	630	7260	4521	1781	9041	6301	3562
64	384	767	7534	5068	2603	0,007 0137	7671	5206
65	452	904	7808	5616	3425	1233	9041	6850
66	521	0,000 9041	8082	6164	4247	2329	0,009 0411	8493
67	589	178	8356	6712	5069	3425	1781	0,011 0137
68	658	315	8630	7260	5891	4521	3151	1781
69	726	452	8904	7808	6713	5617	4521	3425
70	795	589	9178	8356	7535	6713	5890	5069
71	863	726	9452	8904	8357	7809	7260	6713
72	932	863	9726	9452	9178	8904	8630	8356
73	0,000 5000	0,001 0000	0,002 0000	0,004 0000	0,006 0000	0,008 0000	0,010 0000	0,012 0000
74	068	137	0274	0548	0822	1096	1370	1644
75	137	274	0548	1096	1644	2192	2740	3288
76	205	411	0822	1644	2466	3288	4110	4932
77	274	548	1096	2192	3288	4384	5480	6576
78	342	685	1370	2740	4110	5480	6850	8220
79	411	822	1644	3288	4932	6576	8220	9863
80	479	959	1918	3836	5754	7672	5989	0,013 1507
81	548	0,001 1096	2192	4384	6576	8767	0,011 0959	3151
82	616	233	2466	4932	7398	9863	2329	4795
83	685	370	2740	5479	8220	0,009 0959	3699	6439
84	753	507	3014	6027	9041	2055	5069	8033
85	822	644	3288	6575	9763	3151	6439	9726
86	890	781	3562	7123	0,007 0685	4247	7809	0,014 1370
87	959	918	3836	7671	1507	5343	9718	3014
88	0,000 6027	0,001 2055	4110	8219	2329	6439	0,012 0548	4658
89	096	192	4384	8767	3151	7535	1918	6302
90	164	329	4658	9315	3973	8630	3288	7946
91	233	466	4932	9863	4795	9726	4658	9589
92	301	603	5205	0,005 0418	5617	0,010 0822	6028	0,015 1233
93	370	740	5479	0959	6439	1918	7398	2877
94	438	877	5753	1507	7261	3014	8767	4521
95	507	0,001 3014	6027	2055	8083	4110	0,013 0137	6165
96	575	151	6301	2603	8901	5206	1507	7809
97	644	288	6575	3151	9726	6302	2877	9452
98	712	425	6849	3699	0,008 0548	7398	4247	0,016 1096
99	781	562	7123	4247	1370	8493	5617	2740
100	849	699	7397	4795	2192	9589	6987	4384

TABLA II *(fragmento)*

Montante de la unidad monetaria en interés compuesto: $(1+i)^t$

t	$i \cdot 100$							
(periodos)	6	6,5	7	8	8,5	9	10	12
1	1,0600 0000	1,0650 0000	1,0700 0000	1,0800 0000	1,0850 0000	1,0900 0000	1,1000 0000	1,1200 0000
2	1,1236 0000	1,1342 2500	1,1449 0000	1,1664 0000	1,1772 2500	1,1881 0000	1,2100 0000	1,2544 0000
3	1,1910 1600	1,2079 4962	1,2250 4300	1,2597 1200	1,2772 8913	1,2950 2900	1,3310 0000	1,4049 2800
4	1,2624 7696	1,2864 6635	1,3107 9601	1,3604 8896	1,3858 5870	1,4115 8161	1,4641 0000	1,5735 1936
5	1,3382 2558	1,3700 8666	1,4025 5173	1,4693 2808	1,5036 5669	1,5386 2395	1,6105 1000	1,7623 4168
6	1,4185 1911	1,4591 4230	1,5007 3035	1,5868 7432	1,6314 6751	1,6771 0011	1,7715 6100	1,9738 2269
7	1,5036 3026	1,5539 8655	1,6057 8148	1,7138 2427	1,7701 4225	1,8280 3912	1,9487 1710	2,2106 8114
8	1,5938 4807	1,6549 9567	1,7181 8618	1,8509 3021	1,9206 0434	1,9925 6264	2,1435 8881	2,4759 6318
9	1,6894 7896	1,7625 7039	1,8384 5921	1,9990 0463	2,0838 5571	2,1718 9328	2,3579 4769	2,7730 7876
10	1,7908 4770	1,8771 3747	1,9671 5136	2,1589 2500	2,2609 8344	2,3673 6367	2,5937 4246	3,1058 4821
11	1,8982 9856	1,9991 5140	2,1048 5195	2,3316 3900	2,4531 6703	2,5804 2641	2,8531 1671	3,4785 4999
12	2,0121 9647	2,1290 9624	2,2521 9159	2,5181 7012	2,6616 8623	2,8126 6478	3,1384 2838	3,8959 7599
13	2,1329 2826	2,2674 8750	2,4098 4500	2,7196 2373	2,8879 2956	3,0658 0461	3,4522 7121	4,3634 9311
14	2,2609 0396	2,4148 7418	2,5785 3415	2,9371 9362	3,1334 0357	3,3417 2703	3,7974 9834	4,8871 1229
15	2,3965 5819	2,5718 4101	2,7590 3154	3,1712 6911	3,3997 4288	3,6424 8246	4,1772 4817	5,4735 6576
16	2,5403 5168	2,7390 1067	2,9521 6375	3,4259 4264	3,6887 2102	3,9703 0588	4,5949 7299	6,1303 9365
17	2,6927 7279	2,9170 4637	3,1588 1521	3,7000 1805	4,0022 6231	4,3276 3341	5,0544 7028	6,8660 4089
18	2,8543 3915	3,1066 5438	3,3799 3228	3,9960 1950	4,3424 5461	4,7171 2042	5,5599 1731	7,6899 6580
19	3,0255 9950	3,3085 8691	2,6165 2753	4,3157 0106	4,7115 6325	5,1416 6125	6,1159 0904	8,6127 6169
20	3,2071 3547	3,5236 4506	3,8696 8446	4,6609 5714	5,1120 4612	5,6044 1077	6,7274 9995	9,6462 9309
21	3,3995 6360	3,7526 8199	4,1405 6237	5,0338 3372	5,5465 7005	6,1088 0774	7,4002 4994	10,8038 4826
22	3,6035 3742	3,9966 0632	4,4304 0174	5,4365 4041	6,0180 2850	6,6586 0043	8,1402 7494	12,1003 1006
23	3,8197 4966	4,2563 8573	4,7405 2986	5,8714 6365	6,5295 6092	7,2578 7447	8,9543 0243	13,5523 4726
24	4,0489 3464	4,5330 5081	5,0723 6695	6,3411 8074	7,0845 7360	7,9110 8317	9,8497 3268	15,1786 2893
25	4,2918 7072	4,8276 9911	5,4274 3264	6,8484 7520	7,6867 6236	8,6230 8066	10,8347 0594	17,0000 6441
26	4,5493 8296	5,1414 9955	5,8073 5292	7,3963 5321	8,3401 3716	9,3991 5792	11,9181 7654	19,0400 7214
27	4,8223 4594	5,4756 9702	6,2138 6763	7,9880 6147	9,0490 4881	10,2450 8213	13,1099 9419	21,3248 8079
28	5,1116 8670	5,8316 1733	6,6488 3836	8,6271 0639	9,8182 1796	11,1671 3952	14,4209 9361	23,8838 6649
29	5,4183 8790	6,2106 7245	7,1142 5705	9,3172 7490	10,6527 6649	12,1721 8208	15,8630 9297	26,7499 3047
30	5,7434 9117	6,6143 6616	7,6122 5504	10,0626 5689	11,5582 5164	13,2676 7847	17,4494 0227	29,9599 2212
31	6,0881 0064	7,0442 9996	8,1451 1290	10,8676 6944	12,5407 0303	14,4617 6953	19,1943 4250	33,5551 1278
32	6,4533 8668	7,5021 7946	8,7152 7080	11,7370 8300	13,6066 6279	15,7633 2879	21,1137 7675	37,5817 2631
33	6,8405 8988	7,9898 2113	9,3253 3975	12,6760 4963	14,7632 2913	17,1820 2838	23,2251 5442	42,0915 3347
34	7,2510 2528	8,5091 5950	9,9781 1354	13,6901 3361	16.0181 0360	18,7284 1093	25,5476 6986	47,1425 1748
35	7,6860 8679	9,0622 5487	10,6765 8148	14,7853 4429	17,3796 4241	20,4139 6792	28,1024 3685	52,7996 1958
36	8,1472 5200	9,6513 0143	11,4239 4219	15,9681 7184	18,8569 1201	22,2512 2503	30,9126 8053	59,1355 7393
37	8,6360 8712	10,2786 3603	12,2236 1814	17,2456 2558	20,4597 5953	24,2538 3528	34,0039 4859	66,2318 4280
38	9,1542 5235	10,9467 4737	13,0792 7141	18,6252 7563	22,1988 2824	26,4366 8046	37,4043 4344	74,1796 6394
39	9,7035 0740	11,6582 8595	13,9948 2041	20,1152 9768	24,0857 2865	28,8159 8170	41,1447 7779	83,0812 2361
40	10,2857 1794	12,4160 7453	14,9744 5784	21,7245 2150	26,1330 1558	31,4094 2005	45,2592 5557	93,0509 7044
41	10,9028 6101	13,2231 1938	16,0226 6989	23,4624 8322	28,3543 2190	34,2362 6786	49,7851 8112	104,2170 8689
42	11,5570 3267	14,0826 2214	17,1442 5678	25,3394 8187	30,7644 3927	37,3175 3197	54,7636 9924	116,7231 3732
43	12,2504 5463	14,9979 9258	18,3443 5475	27,3666 4042	33,3794 1660	40,6761 0984	60,2400 6916	130,7299 1380
44	12,9854 8191	15,9728 6209	19,6284 5959	29,5559 7166	36,2166 1702	44,3369 5973	66,2640 7608	146,4175 4346
45	13,7646 1083	17,0110 9813	21,0024 5176	31,9204 4939	39,2950 8371	48,3272 8610	72,8904 8369	163,9876 0387
46	14,5904 8748	18,1168 1951	22,4726 2338	34,4740 8534	42,6351 6583	52,6767 4185	80,1795 3205	183,6661 1634
47	15,4659 1673	19,2944 1278	24,0457 0702	37,2320 1217	46,2591 5492	57,4176 4862	88,1974 8526	205,7060 5030
48	16,3938 7173	20,5485 4961	25,7289 0651	40,2105 7314	50,1911 8309	62,5852 3700	97,0172 3378	230,3907 7633
49	17,3775 0403	21,8842 0533	27,5299 2997	43,4274 1899	54,4574 3365	68,2179 0833	106,7189 5716	258,0376 6949
50	18,4201 5427	23,3066 7868	29,4570 2506	46,9016 1251	59,0863 1551	74,3575 2008	117,3908 5288	289,0021 8983

TABLA III *(fragmento)*

Valor actual de la unidad monetaria en capitalización compuesta: $(1+i)^{-t}$

t	$i \cdot 100$							
(periodos)	6	6,5	7	8	8,5	9	10	12
1	0,9433 9623	0,9389 6714	0,9345 7944	0,9259 2593	0,9216 5899	0,9174 3119	0,9090 9091	0,8928 5714
2	0,8899 9644	0,8816 5928	0,8734 3873	0,8573 3882	0,8494 5529	0,8416 7999	0,8264 4628	0,7971 9388
3	0,8396 1928	0,8278 4909	0,8162 9788	0,7938 3224	0,7829 0810	0,7721 8348	0,7513 1480	0,7117 8025
4	0,7920 9366	0,7773 2309	0,7628 8521	0,7350 2985	0,7215 7428	0,7084 2521	0,6830 1346	0,6355 1808
5	0,7472 5817	0,7298 8084	0,7129 8618	0,6805 8320	0,6650 4542	0,6499 3139	0,6208 2132	0,5674 2686
6	0,7049 6054	0,6853 3412	0,6663 4222	0,6301 6963	0,6129 4509	0,5962 6733	0,5644 7393	0,5066 3112
7	0,6650 5711	0,6435 0621	0,6227 4974	0,5834 9040	0,5649 2635	0,5470 3424	0,5131 5812	0,4523 4922
8	0,6274 1237	0,6042 3119	0,5820 0910	0,5402 6888	0,5206 6945	0,5018 6628	0,4665 0738	0,4038 8323
9	0,5918 9846	0,5673 5323	0,5439 3374	0,5002 4897	0,4798 7968	0,4604 2778	0,4240 9762	0,3606 1002
10	0,5583 9478	0,5327 2604	0,5083 4929	0,4631 9349	0,4422 8542	0,4224 1081	0,3855 4329	0,3219 7324
11	0,5267 8753	0,5002 1224	0,4750 9280	0,4288 8286	0,4076 3633	0,3875 3285	0,3504 9390	0,2874 7610
12	0,4969 6936	0,4696 8285	0,4440 1196	0,3971 1376	0,3757 0168	0,3555 3473	0,3186 3082	0,2566 7509
13	0,4688 3902	0,4410 1676	0,4149 6445	0,3676 9792	0,3462 6883	0,3261 7865	0,2896 6438	0,2291 7419
14	0,4423 0096	0,4141 0025	0,3878 1724	0,3404 6104	0,3191 4178	0,2992 4647	0,2633 3125	0,2046 1981
15	0,4172 6506	0,3888 2652	0,3624 4602	0,3152 4170	0,2941 3989	0,2745 3804	0,2393 9205	0,1826 9626
16	0,3936 4628	0,3650 9533	0,3387 3460	0,2918 9047	0,2710 9667	0,2518 6976	0,2176 2914	0,1631 2166
17	0,3713 6442	0,3428 1251	0,3165 7439	0,2702 6895	0,2498 5869	0,2310 7318	0,1978 4467	0,1456 4434
18	0,3503 4379	0,3218 8969	0,2958 6392	0,2502 4903	0,2302 8450	0,2119 9374	0,1798 5879	0,1300 3959
19	0,3305 1301	0,3022 4384	0,2765 0833	0,2317 1206	0,2122 4378	0,1944 8967	0,1635 0799	0,1161 0678
20	0,3118 0473	0,2837 9703	0,2584 1900	0,2145 4821	0,1956 1639	0,1784 3089	0,1486 4363	0,1036 6677
21	0,2941 5540	0,2664 7608	0,2415 1309	0,1986 5575	0,1802 9160	0,1636 9806	0,1351 3057	0,0925 5961
22	0,2775 0510	0,2502 1228	0,2257 1317	0,1839 4051	0,1661 6738	0,1501 8171	0,1228 4597	0,0826 4251
23	0,2617 9726	0,2349 4111	0,2109 4688	0,1703 1528	0,1531 4965	0,1377 8139	0,1116 7816	0,0737 8796
24	0,2469 7855	0,2206 0198	0,1971 4662	0,1576 9934	0,1411 5176	0,1264 0494	0,1015 2560	0,0658 8210
25	0,2329 9863	0,2071 3801	0,1842 4918	0,1460 1790	0,1300 9378	0,1159 6784	0,0922 9600	0,0588 2331
26	0,2198 1003	0,1944 9579	0,1721 9549	0,1352 0176	0,1199 0210	0,1063 9251	0,0839 0545	0,0525 2081
27	0,2073 6795	0,1826 2515	0,1609 3037	0,1251 8682	0,1105 0885	0,0976 0781	0,0762 7768	0,0468 9358
28	0,1956 3014	0,1714 7902	0,1504 0221	0,1159 1372	0,1018 5148	0,0895 4845	0,0693 4335	0,0418 6927
29	0,1845 5674	0,1610 1316	0,1405 6282	0,1073 2752	0,0938 7233	0,0821 5454	0,0630 3941	0,0373 8327
30	0,1741 1013	0,1511 8607	0,1313 6712	0,0993 7733	0,0865 1828	0,0753 7114	0,0573 0855	0,0333 7792
31	0,1642 5484	0,1419 5875	0,1227 7201	0,0920 1605	0,0797 4035	0,0691 4783	0,0520 9868	0,0298 0172
32	0,1549 5740	0,1332 9460	0,1147 4113	0,0852 0005	0,0734 9341	0,0634 3838	0,0473 6244	0,0266 0868
33	0,1461 8622	0,1251 5925	0,1072 3470	0,0788 8893	0,0677 3586	0,0582 0035	0,0430 5676	0,0237 5775
34	0,1379 1153	0,1175 2042	0,1002 1934	0,0730 4531	0,0624 2936	0,0533 9481	0,0391 4251	0,0212 1227
35	0,1301 0522	0,1103 4781	0,0936 6294	0,0676 3454	0,0575 3858	0,0489 8607	0,0355 8410	0,0189 3953
36	0,1227 4077	0,1036 1297	0,0875 3546	9,0626 2458	0,0530 3095	0,0449 4135	0,0323 4918	0,0169 1029
37	0,1157 9318	0,0972 8917	0,0818 0884	0,0579 8572	0,0488 7645	0,0412 3059	0,0294 0835	0,0150 9848
38	0,1092 3885	0,0913 5134	0,0764 5686	0,0536 9048	0,0450 4742	0,0378 2623	0,0267 3486	0,0134 8078
39	0,1030 5552	0,0857 7590	0,0714 5501	0,0497 1341	0,0415 1836	0,0347 0296	0,0243 0442	0,0120 3641
40	0,0972 2219	0,0805 4075	0,0667 8038	0,0460 3093	0,0382 6577	0,0318 3758	0,0220 9493	0,0107 4680
41	0,0917 1905	0,0756 2512	0,0624 1157	0,0426 2123	0,0352 6799	0,0292 0879	0,0200 8630	0,0095 9536
42	0,0865 2740	0,0710 0950	0,0583 2857	0,0394 6411	0,0325 0506	0,0267 9706	0,0182 6027	0,0085 6728
43	0,0816 2962	0,0666 7559	0,0545 1268	0,0365 4084	0,0299 5858	0,0245 8446	0,0166 0025	0,0076 4936
44	0,0770 0908	0,0626 0619	0,0509 4643	0,0338 3411	0,0276 1160	0,0225 5455	0,0150 9113	0,0068 2978
45	0,0726 5007	0,0587 8515	0,0476 1349	0,0313 2788	0,0254 4848	0,0206 9224	0,0137 1921	0,0060 9802
46	0,0685 3781	0,0551 9733	0,0444 9859	0,0290 0730	0,0234 5482	0,0189 8371	0,0124 7201	0,0054 4466
47	0,0646 5831	0,0518 2848	0,0415 8747	0,0268 5861	0,0216 1734	0,0174 1625	0,0113 3819	0,0048 6131
48	0,0609 9840	0,0486 6524	0,0388 6679	0,0248 6908	0,0199 2382	0,0159 7821	0,0103 0745	0,0043 4045
49	0,0575 4566	0,0456 9506	0,0363 2410	0,0230 2693	0,0183 6297	0,0146 5891	0,0093 7041	0,0038 7540
50	0,0542 8836	0,0429 0616	0,0339 4776	0,0213 2123	0,0169 2439	0,0134 4854	0,0085 1855	0,0034 6018

TABLA IV *(fragmento)*

Valor final de la unidad pospagable: $\frac{(1+i)^t-1}{i}$

t	$i \cdot 100$					
(periodos)	2	2,5	3	3,5	4	8
1	1,0000 0000	1,0000 0000	1,0000 0000	1,0000 0000	1,0000 0000	1,0000 0000
2	2,0200 0000	2,0250 0000	2,0300 0000	2,0350 0000	2,0400 0000	2,0800 0000
3	3,0604 0000	3,0756 2500	3,0909 0000	3,1062 2500	3,1216 0000	3,2464 0000
4	4,1216 0800	4,1525 1562	4,1836 2700	4,2149 4287	4,2464 6400	4,5061 1200
5	5,2040 4016	5,2563 3852	5,3091 3581	5,3624 6588	5,4163 2256	5,8666 0096
6	6,3081 2096	6,3877 3673	6,4684 0988	6,5501 5218	6,6329 7546	7,3359 2904
7	7,4342 8338	7,5474 3015	7,6624 6218	7,7794 0751	7,8982 9448	8,9228 0336
8	8,5829 6905	8,7361 1590	8,8923 3605	9,0516 8677	9,2142 2626	10,6366 2763
9	9,7546 2843	9,9545 1880	10,1591 0613	10,3684 9581	10,5827 9531	12,4875 5784
10	10,9497 2100	11,2033 8177	11,4638 7931	11,7313 9316	12,0061 0712	14,4865 6247
11	12,1687 1542	12,4834 6631	12,8077 9569	13,1419 9192	13,4863 5141	16,6454 8746
12	13,4120 8973	13,7955 5297	14,1920 2956	14,6019 6164	15,0258 0546	18,9771 2646
13	14,6803 3152	15,1404 4179	15,6177 9045	16,1130 3030	16,6268 3768	21,4952 9658
14	15,9739 3815	16,5189 5284	17,0863 2416	17,6769 8636	18,2919 1119	24,2149 2030
15	17,2934 1692	17,9319 2666	18,5989 1389	19,2956 8088	20,0235 8764	27,1521 1393
16	18,6392 8525	19,3802 2483	20,1568 8130	20,9710 2971	21,8245 3114	30,3242 8304
17	20,0120 7096	20,8647 3045	21,7615 8774	22,7050 1575	23,6975 1239	33,7502 2568
18	21,4123 1238	22,3863 4871	23,4144 3537	24,4996 9130	25,6454 1288	37,4502 4374
19	22,8405 5863	23,9460 0743	25,1168 6844	26,3571 8050	27,6712 2940	41,4462 6324
20	24,2973 6980	25,5446 5761	26,8703 7449	28,2796 8181	29,7780 7858	45,7619 6430
21	25,7833 1719	27,1832 7405	28,6764 8572	30,2694 7068	31,9692 0172	50,4229 2144
22	27,2989 8354	28,8628 5590	30,5367 8030	32,3289 0215	34,2479 6979	55,4567 5516
23	28,8449 6321	30,5844 2730	32,4528 8370	34,4604 1373	36,6178 8858	60,8932 9557
24	30,4218 6247	32,3490 3798	34,4264 7022	36,6665 2821	39,0826 0412	66,7647 5922
25	32,0302 9972	34,1577 6393	36,4592 6432	38,9498 5669	41,6459 0829	73,1059 3995
26	33,6709 0572	36,0117 0803	38,5530 4225	41,3131 0168	44,3117 4462	79,9544 1515
27	35,3443 2383	37,9120 0073	40,7096 3352	43,7590 6024	47,0842 1440	87,3507 6836
28	37,0512 1031	39,8598 0075	42,9309 2252	46,2906 2734	49,9675 8298	95,3388 2983
29	38,7922 3451	41,8562 9577	45,2188 5020	48,9107 9930	52,9662 8630	103,9659 3622
30	40,5680 7920	43,9027 0316	47,5754 1571	51,6226 7728	56,0849 3775	113,2832 1111
31	42,3794 4079	46,0002 7074	50,0026 7818	54,4294 7098	59,3283 3526	123,3458 6800
32	44,2270 2960	48,1502 7751	52,5027 5852	57,3345 0247	62,7014 6867	134,2135 3744
33	46,1115 7020	50,3540 3445	55,0778 4128	60,3412 1005	66,2095 2742	145,9506 2044
34	48,0338 0160	52,6128 8531	57,7301 7652	63,4531 5240	69,8579 0851	158,6266 7007
35	49,9944 7763	54,9282 0744	60,4620 8181	66,6740 1274	73,6522 2486	172,3168 0368
36	51,9943 6718	57,3014 1263	63,2759 4427	70,0076 0318	77,5983 1385	187,1021 4797
37	54,0342 5453	59,7339 4794	66,1742 2259	73,4578 6930	81,7022 4640	203,0703 1981
38	56,1149 3962	62,2272 9664	69,1594 4927	77,0288 9472	85,9703 3626	220,3159 4540
39	58,2372 3841	64,7829 7906	72,2342 3275	80,7249 0604	90,4091 4971	238,9412 2103
40	60,4019 8318	67,4025 5354	75,4012 5973	84,5502 7775	95,0255 1570	259,0565 1871
41	62,6100 2284	70,0876 1737	78,6632 9753	88,5095 3747	99,8265 3633	280,7810 4021
42	64,8622 2330	72,8398 0781	82,0231 9645	92,6073 7128	104,8195 9778	304,2435 2342
43	67,1594 6776	75,6608 0300	85,4838 9234	96,8486 2928	110,0123 8169	329,5830 0530
44	69,5026 5712	78,5523 2308	89,0484 0911	101,2383 3130	115,4128 7696	356,9496 4572
45	71,8927 1026	81,5161 3116	92,7198 6139	105,7816 7290	121,0293 9204	386,5056 1738
46	74,3305 6447	84,5540 3443	96,5014 5723	110,4840 3145	126,8705 6772	418,4260 6677
47	76,8171 7576	87,6678 8529	100,3965 0095	115,3509 7255	132,9453 9043	452,9001 5211
48	79,3535 1927	90,8595 8243	104,4083 9598	120,3882 5659	139,2632 0604	490,1321 6428
49	81,9405 8966	94,1310 7199	108,5406 4785	125,6018 4557	145,8337 3429	530,3427 3742
50	84,5794 0145	97,4843 4879	112,7968 6729	130,9979 1016	152,6670 8366	573,7701 5641

TABLA V *(fragmento)*

Valor del factor de amortización de la deuda unidad: $\alpha_{\overline{t}|} = \dfrac{i}{1-(1+i)^{-t}}$

t	$i \cdot 100$					
(periodos)	2	2,5	3	3,5	4	8
1	1,0200 0000	1,0250 0000	1,0300 0000	1,0350 0000	1,0400 0000	1,0800 0000
2	0,5150 4950	0,5188 2716	0,5226 1084	0,5264 0049	0,5301 9608	0,5607 6923
3	0,3467 5467	0,3501 3717	0,3535 3036	0,3569 3418	0,3603 4854	0,3880 3351
4	0,2626 2375	0,2658 1788	0,2690 2705	0,2722 5114	0,2754 9005	0,3019 2080
5	0,2121 5839	0,2152 4686	0,2183 5457	0,2214 8137	0,2246 2711	0,2504 5645
6	0,1785 2581	0,1815 4997	0,1845 9750	0,1876 6821	0,1907 6190	0,2163 1539
7	0,1545 1195	0,1574 9543	0,1605 0635	0,1635 4449	0,1666 0961	0,1920 7240
8	0,1365 0980	0,1394 6735	0,1424 5639	0,1454 7665	0,1485 2783	0,1740 1476
9	0,1225 1544	0,1254 5689	0,1284 3386	0,1314 4601	0,1344 9299	0,1600 7971
10	0,1113 2653	0,1142 5877	0,1172 3051	0,1202 4137	0,1232 9094	0,1490 2949
11	0,1021 7794	0,1051 0596	0,1080 7745	0,1110 9197	0,1141 4904	0,1400 7634
12	0,0945 5960	0,0974 8713	0,1004 6209	0,1034 8395	0,1065 5217	0,1326 9502
13	0,0881 1835	0,0910 4827	0,0940 2954	0,0970 6157	0,1001 4373	0,1265 2181
14	0,0826 0197	0,0855 3653	0,0885 2634	0,0915 7073	0,0946 6897	0,1212 9685
15	0,0778 2547	0,0807 6646	0,0837 6658	0,0868 2507	0,0899 4110	0,1168 2954
16	0,0736 5013	0,0765 9899	0,0796 1085	0,0826 8483	0,0858 2000	0,1129 7687
17	0,0699 6984	0,0729 2777	0,0759 5253	0,0790 4313	0,0821 9852	0,1096 2943
18	0,0667 0210	0,0696 7008	0,0727 0870	0,0758 1884	0,0789 9333	0,1067 0210
19	0,0637 8177	0,0667 6062	0,0698 1388	0,0729 4033	0,0761 3862	0,1041 2763
20	0,0611 5672	0,0641 4713	0,0672 1571	0,0703 6108	0,0735 8175	0,1018 5221
21	0.0587 8477	0,0617 8733	0,0648 7178	0,0680 3659	0,0721 8011	0,0998 3225
22	0,0566 3140	0,0596 4660	0,0627 4739	0,0659 3207	0,0691 9881	0,0980 3207
23	0,0546 6810	0,0576 9638	0,0608 1390	0,0640 1880	0,0673 0906	0,0964 2217
24	0,0528 7110	0,0559 1282	0,0590 4742	0,0622 7283	0,0655 8683	0,0949 7796
25	0,0512 2044	0,0542 7592	0,0574 2787	0,0606 7404	0,0640 1196	0,0936 7878
26	0,0496 9923	0,0527 6875	0,0559 3829	0,0592 0540	0,0625 6738	0,0925 0713
27	0,0482 9309	0,0513 7687	0,0545 6421	0,0578 5241	0,0612 3854	0,0914 4810
28	0,0469 8967	0,0500 8793	0,0532 9323	0,0566 0265	0,0600 1298	0,0904 8890
29	0,0457 7835	0,0488 9127	0,0521 1467	0,0554 4538	0,0588 7993	0,0896 1854
30	0,0446 4992	0,0477 7764	0,0510 1926	0,0543 7133	0,0578 3010	0,0888 2473
31	0,0435 9635	0,0467 3900	0,0499 9893	0,0533 7240	0,0568 5535	0,0881 0728
32	0,0426 1061	0,0457 6831	0,0490 4662	0,0524 4150	0,0559 4859	0,0874 5081
33	0,0416 8653	0,0448 5938	0,0481 5612	0,0515 7242	0,0551 0357	0,0868 5163
34	0,0408 1867	0,0440 0675	0,0473 2196	0,0507 5966	0,0543 1477	0,0863 0411
35	0,0400 0221	0,0432 0558	0,0465 3929	0,0499 9835	0,0535 7732	0,0858 0326
36	0,0392 3285	0,0424 5158	0,0458 0379	0,0492 8416	0,0528 8688	0,0853 4467
37	0,0385 0678	0,0417 4090	0,0451 1162	0,0486 1325	0,0522 3956	0,0849 2440
38	0,0378 2057	0,0410 7012	0,0444 5934	0,0479 8214	0,0516 3192	0,0845 3894
39	0,0371 7114	0,0404 3615	0,0438 4385	0,0473 8775	0,0510 6083	0,0841 8513
40	0,0365 5575	0,0398 3623	0,0432 6238	0,0468 2728	0,0505 2349	0,0838 6016
41	0,0359 7188	0,0392 6786	0,0427 1241	0,0462 9822	0,0500 1738	0,0835 6149
42	0,0354 1729	0,0387 2876	0,0421 9168	0,0457 9828	0,0495 4020	0,0832 8680
43	0,0348 8993	0,0382 1688	0,0416 9811	0,0453 2539	0,0490 8989	0,0830 3414
44	0,0343 8794	0,0377 3037	0,0412 2985	0,0448 7768	0,0486 6454	0,0828 0152
45	0,0339 0962	0,0372 6752	0,0407 8518	0,0444 5343	0,0482 6246	0,0825 8728
46	0,0334 5342	0,0368 2676	0,0403 6254	0,0440 5108	0,0478 8205	0,0823 8991
47	0,0330 1792	0,0364 0669	0,0399 6051	0,0436 6919	0,0475 2189	0,0822 0799
48	0,0326 0184	0,0360 0599	0,0395 7777	0,0433 0646	0,0471 8065	0,0820 4025
49	0,0322 0396	0,0356 2348	0,0392 1314	0,0429 6167	0,0468 5712	0,0818 8557
50	0,0318 2327	0,0352 5806	0,0388 6550	0,0426 3371	0,0465 5020	0,0817 4286

TABLA VI *(fragmento)*

Valor actual de la unidad monetaria pospagable: $a_{\overline{t}|} = \dfrac{1-(1+i)^{-t}}{i}$

t	$i \cdot 100$					
(periodos)	2	2,5	3	3,5	4	8
1	0,9803 9216	0,9756 0976	0,9708 7379	0,9661 8357	0,9615 3846	0,9259 2593
2	1,9415 6094	1,9274 2415	1,9134 6970	1,8996 9428	1,8860 9467	1,7832 6475
3	2,8838 8327	2,8560 2356	2,8286 1135	2,8016 3698	2,7750 9103	2,5770 9699
4	3,8077 2870	3,7619 7421	3,7170 9840	3,6730 7921	3,6298 9522	3,3121 2684
5	4,7134 5951	4,6458 2850	4,5797 0719	4,5150 5238	4,4518 2233	3,9927 1004
6	5,6014 3089	5,5081 2536	5,4171 9144	5,3285 5302	5,2421 3686	4,6228 7966
7	6,4719 9107	6,3493 9060	6,2302 8296	6,1145 4398	6,0020 5467	5,2063 7006
8	7,3254 8144	7,1701 3717	7,0196 9219	6,8739 5554	6,7327 4487	5,7466 3894
9	8,1622 3671	7,9708 6553	7,7861 0892	7,6076 8651	7,4353 3161	6,2468 8791
10	8,9825 8501	8,7520 6393	8,5302 0284	8,3166 0532	8,1108 9578	6,7100 8140
11	9,7868 4805	9,5142 0871	9,2526 2411	9,0015 5104	8,7604 7671	7,1389 6426
12	10,5753 4122	10,2577 6460	9,9540 0399	9,6633 3433	9,3850 7376	7,5360 7802
13	11,3483 7375	10,9831 8497	10,6349 5533	10,3027 3849	9,9856 4785	7,9037 7594
14	12,1062 4877	11,6909 1217	11,2960 7314	10,9205 2028	10,5631 2293	8,2442 3698
15	12,8492 6350	12,3813 7773	11,9379 3509	11,5174 1090	11,1183 8743	8,5594 7869
16	13,5777 0931	13,0550 0266	12,6511 0203	12,0941 1681	11,6522 9561	8,8513 6916
17	14,2918 7188	13,7121 9772	13,1661 1847	12,6513 2059	12,1656 6885	9,1216 3811
18	14,9920 3125	14,3533 6363	13,7535 1308	13,1896 8172	12,6592 9697	9,3718 8714
19	15,6784 6201	14,9788 9134	14,3237 9911	13,7098 3742	13,1339 3940	9,6035 9920
20	16,3514 3334	15,5891 6229	14,8774 7486	14,2124 0330	13,5903 2634	9,8181 4741
21	17,0112 0916	16,1845 4857	15,4150 2414	14,6979 7420	14,0291 5995	10,0168 0316
22	17,6580 4820	16,7654 1324	15,9369 1664	15,1671 2484	14,4511 1533	10,2007 4366
23	18,2922 0412	17,3321 1048	16,4436 0839	15,6204 1047	14,8568 4167	10,3710 5895
24	18,9139 2560	17,8849 8583	16,9355 4212	16,0583 6760	15,2469 6314	10,5287 5828
25	19,5234 5647	18,4243 7642	17,4131 4769	16,4815 1459	15,6220 7994	10,6747 7619
26	20,1210 3576	18,9506 1114	17,8768 4242	16,8903 5226	15,9827 6918	10,8099 7795
27	20,7068 9780	19,4640 1087	18,3270 3147	17,2853 6451	16,3295 8575	10,9351 6477
28	21,2812 7236	19,9648 8866	18,7641 0823	17,6670 1885	16,6630 6322	11,0510 7849
29	21,8443 8466	20,4535 4991	19,1884 5459	18,0357 6700	16,9837 1463	11,1584 0601
30	22,3964 5555	20,9302 9259	19,6004 4135	18,3920 4541	17,2920 3330	11,2577 8334
31	22,9377 0152	21,3954 0741	20,0004 2849	18,7362 7576	17,5884 9356	11,3497 9939
32	23,4683 3482	21,8491 7796	20,3887 6553	19,0688 6547	17,8735 5150	11,4349 9944
33	23,9885 6355	22,2918 8094	20,7657 9178	19,3902 0818	18,1476 4567	11,5138 8837
34	24,4985 9172	22,7237 8628	21,1318 3668	19,7006 8423	18,4111 9776	11,5869 3367
35	24,9986 1933	23,1451 5734	21,4872 2007	20,0006 6110	18,6646 1323	11,6545 6822
36	25,4888 4248	23,5562 5107	21,8322 5250	20,2904 9381	18,9082 8195	11,7171 9279
37	25,9694 5341	23,9573 1812	22,1672 3544	20,5705 2542	19,1425 7880	11,7751 7851
38	26,4406 4060	24,3486 0304	22,4924 6159	20,8410 8736	19,3678 6423	11,8288 6899
39	26,9025 8883	24,7303 4443	22,8082 1513	21,1024 9987	19,5844 8484	11,8785 8240
40	27,3554 7924	25,1027 7505	23,1147 7197	21,3550 7234	19,7927 7388	11,9246 1333
41	27,7994 8945	25,4661 2200	23,4123 9997	21,5991 0371	19,9930 5181	11,9672 3457
42	28,2347 9358	25,8206 0683	23,7013 5920	21,8348 8281	20,1856 2674	12,0066 9867
43	28,6615 6233	26,1664 4569	23,9819 0213	22,0626 8870	20,3707 9494	12,0432 3951
44	29,0799 6307	26,5038 4945	24,2542 7392	22,2827 9102	20,5488 4129	12,0770 7362
45	29,4901 5987	26,8330 2386	24,5187 1254	22,4954 5026	20,7200 3970	12,1084 0150
46	29,8923 1360	27,1541 6962	24,7754 4907	22,7009 1813	20,8846 5356	12,1374 0880
47	30,2865 8196	27,4674 8255	25,0247 0783	22,8894 3780	21,0429 3612	12,1642 6741
48	30,6731 1957	27,7731 5371	25,2667 0664	23,0912 4425	21,1951 3088	12,1891 3649
49	31,0520 7801	28,0713 6947	25,5016 5693	23,2765 6450	21,3414 7200	12,2121 6341
50	31,4236 0589	28,3623 1168	25,7297 6401	23,4556 1787	21,4821 8462	12,2334 8464

1.5

Ejercicios y problemas de recapitulación

1. ¿Cuántos números de cuatro cifras, escritos en base 5, pueden establecerse?

2. ¿Cuál es el cardinal del conjunto A^3, siendo $A = \{\text{vocales}\}$?

3. Demuéstrese que $V_{n,5} = \dot{5}$.

4. Determínense cuántos números de cifras distintas, menores de 3 000 y mayores que 1 233, se pueden formar con los guarismos 0, 1, 2, 3 y 4.

5. El número de variaciones ternarias de n elementos es 1 716, y el de quinarias, 154 440. Determínese n.

6. Un monomio puede tener las indeterminadas x, y, z, y los exponentes 2, 3, 4. ¿Cuántos monomios de este tipo pueden escribirse, sin tener en cuenta la conmutatividad?

7. Determínese n, sabiendo que $6V_{n,3} = V_{n,5}$.

8. Calcúlese n, sabiendo que es solución de la ecuación

$$V_{n,2} + V_{n-2,2} + V_{n-4,2} = 98.$$

9. Determinar el número m que satisface $P_m = 2V_{5,3}$.

10. Se lanzan al aire seis monedas. ¿De cuántos modos pueden obtenerse cuatro cruces?

11. Establézcase una fórmula para el cálculo del número de diagonales de un polígono de n lados. Luego, determínese el polígono cuyo número de lados coincide con el de sus diagonales.

12. Resuélvase en N la ecuación

$$2 \cdot \binom{2x}{x} = 7 \cdot \binom{2x-2}{x-1}$$

13. ¿Cuántos números superiores a 1 millón pueden escribirse con las cifras 0, 2, 2, 3, 3, 3, 4?

14. Con las cifras 1, 2, 3 y 4, ¿cuántos números de seis cifras pueden formarse? Determínese la suma de todos ellos.

15. Con las cifras 1, 3, 4, 5, 7 se establecen todos los números de cinco cifras diferentes. Determínense:

a) el número de números formados;
b) número de ellos que son múltiplos de 2, y número de los que son múltiplos de 4.

16. Se tienen los conjuntos de números $\{2, 3, 4, 7\}$ y $\{1, 5, 6, 8, 9\}$. ¿Cuántos números se pueden formar, de modo que estén constituidos por tres elementos diferentes del primer conjunto y tres distintos del segundo?

17. En una progresión aritmética de número impar de términos, la suma de los de lugar impar es 75, y los de lugar par suman 60. Determínese el término central, así como el número de términos.

18. Establécanse el valor de k y el a_n de la sucesión

$$\frac{k^2-1}{k},\ k,\ \frac{k^2+1}{k},\ \frac{k^2+2}{k},\ \ldots,$$

en la que $k \in N$.

19. Se dispone en forma de pirámide un conjunto de bolas esféricas iguales, colocando de base un cuadrado de doce bolas por lado. ¿Cuántas bolas se han colocado?

20. En la progresión aritmética a, b, c, sucede que $a+b+c=15$, mientras que la suma de los cuadrados de sus términos es 107. Determínense los tres términos de la progresión.

21. Calcúlese la suma de las infinitas ordenadas de la gráfica cartesiana de la aplicación $f: N \to R$ $y = 3 \cdot (0,5)^x$.

22. Resuélvase la ecuación en R

$$0,1\widehat{8}\,x^2 - 0,\widehat{3}\,x + 0,1\widehat{4} = 0.$$

23. Determínese la fórmula general de la suma de los términos de la progresión

$$(a-b),\ \left(\frac{b^2}{a}-\frac{b^3}{a^2}\right),\ \left(\frac{b^4}{a^3}-\frac{b^5}{a^4}\right),\ \ldots$$

24. Una pelota elástica se deja caer desde k metros, rebotando cada vez a los 5/8 de la altura de la que cae, respectivamente. Determínense los metros que ha recorrido hasta su reposo.

25. En una circunferencia de radio R se inscribe un hexágono regular, y en éste, una nueva circunferencia, en la que se vuelve a inscribir un nuevo hexágono regular, prosiguiendo la construcción indefinidamente.

Determínese la suma de todos los perímetros y la de todas las áreas de los polígonos así construidos.

26. El producto de tres números en progresión geométrica es 512. Hállense, sabiendo que suman 42.

27. El censo de una localidad es hoy de 5 000 vecinos. Se estima que su crecimiento demográfico en los diez próximos años va a ser del 5 por 100. ¿Cuántos habitantes tendrá ese pueblo dentro de tres años?

28. Determínese el tanto por ciento de interés compuesto anual al que está colocado un capital que en diez años ha producido la mitad de su valor.

29. Se desea formar un capital de 2 500 000 pesetas en veinte años, al 4 por 100 anual de interés. Calcúlese la anualidad necesaria para ello.

30. Calcúlese la anualidad que ha de pagarse, durante diez años, para amortizar una deuda de 5 millones, contraída al 4 por 100 de interés.

1.6

Autoevaluación A-1

1. Si en la aplicación $f: A \to B$ se cumple que $\forall b \in B$, $\exists a \in A / b = f(a)$, se puede asegurar que la aplicación es

a) inyectiva;
b) exhaustiva;
c) biyectiva;
d) no es aplicación.

2. Si sucede que $\exists b \in B / f(a_1) = f(a_2) = b$, $a_1, a_2 \in A$, se puede decir de la aplicación $f: A \to B$ que

a) no es exhaustiva;
b) es biyección;
c) no es inyectiva;
d) no es aplicación.

3. Sabiendo que un conjunto A tiene trece subconjuntos, se puede decir que

a) su conjunto-potencia tiene trece elementos;
b) ese conjunto A no existe;
c) el cardinal del conjunto de sus partes es 2^{13};
d) su cardinal es $\sqrt{13}$.

4. El número de combinaciones ternarias de n elementos y el de variaciones de esos n elementos, tomados de tres en tres, cumplen una de estas relaciones:

a) $V_{n,3} < C_{n,3}$;

b) $\binom{n}{3} > n(n-1)(n-2)$;

c) $V_{n,3} \times P_3 = C_{n,3}$;

d) $\binom{n}{3} < n(n-1)(n-2)$.

5. El número de variaciones formadas con ocho elementos se puede descomponer en producto de cinco factores consecutivos. Ello indica que:

a) los elementos se tomaron de cinco en cinco;
b) se trata de variaciones ternarias $(8-5=3)$;
c) han de ser ocho factores;
d) esas variaciones son con repetición.

6. Al dividir el número de variaciones ternarias de n elementos por $3!$, se obtiene $\binom{5}{3}$. De ello se deduce que:

a) $n=5-3=2$;
b) $n=5$;
c) son combinaciones ternarias;
d) que se ha multiplicado por P_n.

7. El mínimo común múltiplo de P_k y $(k-2)!$ es

a) k;
b) $k!$;
c) $(k-2)!$;
d) $(k-2)$.

8. Si el número combinatorio $\binom{a}{b}$ es correcto, se puede asegurar que:

a) $a \in N$ y $b \in N$;
b) $a > b$;
c) $a - b \neq 0$;
d) $b \leqslant a$.

9. Si se encuentra escrito que $\binom{m}{n} = \frac{1}{5}$, puede decir que:

a) $n > m$;
b) no es posible porque $\binom{m}{n} \in N$;
c) $n = 5\,m$;
d) representa un subconjunto de cinco elementos.

10. Uno de los cuatro grupos de expresiones tiene todas correctas. Descúbralo.

a) $\binom{m}{m-n} = \binom{m}{n}$;

$0! = 0$

$\binom{n}{0} = 1$

b) $\binom{n}{n-m} = \binom{n}{m}$;

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$$

c) $\binom{k}{0} = 1$;

$$\binom{0}{m} = 0$$

$$1! = 1$$

d) $\binom{n-m}{n} = \binom{m}{n}$.

$$3 \times a! = (3a)!$$

$$\binom{1}{1} = 0.$$

11. El término general de la sucesión $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{6}{10}, \frac{24}{17}, \ldots$, es

a) $\dfrac{(n-1)!}{2+2n}$;

b) $\dfrac{n!}{n+4}$;

c) $\dfrac{n!}{n^2+1}$;

d) $\dfrac{3n}{2n+1}$.

12. La representación «cartesiana» de una progresión aritmética es

a) una curva exponencial;
b) una recta;
c) una recta que no pasa por el origen;
d) una serie de puntos alineados.

13. El dominio de la variable en una aplicación-sucesión es

a) R;
b) N;
c) Z;
d) todo el plano.

14. La media aritmética y la geométrica de dos números coinciden. Por eso se puede asegurar que

a) es el 1;
b) son cualquier par de naturales iguales;
c) son dos números pares iguales;
d) no es posible.

15. De una progresión geométrica cuyo $a_1 = -\sqrt{2}$ y $r = \sqrt{3}$ se puede decir que

a) es oscilante;
b) es decreciente limitada;
c) es creciente limitada;
d) es decreciente ilimitada.

16. La diferencia $1 - 0{,}\widehat{9}$ es igual a

a) 0,1;
b) $0{,}\widehat{1}$;
c) cero;
d) $0{,}\widehat{8}$.

17. El producto de los n términos de una progresión geométrica es 2 048. De ello puede deducirse que

a) tiene un número impar de términos;
b) tiene un número par de términos;
c) todos sus términos son positivos;
d) no tiene término central.

18. El capital acumulado durante cierto tiempo por una suma puesta al R por ciento coincide, capitalizando a interés simple o a interés compuesto. Ello indica que

a) es la unidad monetaria;
b) se trata de un año;
c) no es posible;
d) el tanto por uno es 0,01.

19. La última anualidad de la amortización de una deuda arroja un montante:

a) $(a - i)$;
b) $a(1 + i)$;
c) a;
d) $a(1 + i)^t$.

20. La última anualidad de capitalización arroja un montante de

a) a;
b) $(a - i)$;
c) $a(1 + i)^{t-1}$;
d) $a(1 + i)$.

21. ¿Cuántos números de cifras distintas, menores de 800, pueden formarse con los cinco primeros primos?

22. ¿Cuántos números distintos menores que 800 están formados por las potencias primeras de tres factores primos distintos de 1 y menores que 13?

23. ¿Cuántos números distintos de cuatro cifras pueden formarse, usando los seis primeros naturales?

24. Al lanzar una moneda al aire cien veces, ¿de cuántos modos puede producirse el suceso «obtener dos caras»?

25. Determínese la suma de todos los números pares múltiplos de 11, mayores que 2 000 y menores que 5 000.

26. En una esfera de radio R se inscribe un cubo, y en este hexaedro, de nuevo se inscribe una esfera, que, a su vez, contiene otro cubo inscrito, continuándose el proceso indefinidamente. Determínese la suma de los volúmenes de todos los cubos así construidos.

27. Tres números que suman 42 están en progresión geométrica. Si al intermedio se le añade 9, se obtiene una progresión aritmética. Determínense esos tres números.

28. Se pretende conseguir un capital de 2 millones de pesos, en veinte años, al 8 por 100 de interés compuesto. ¿Cuántos pesos han de ingresarse anualmente en el banco?

29. Se ha conseguido reunir una suma de 77 000 bolívares, habiendo abonado, durante unos años, 2 000 bolívares anuales, capitalizados al 3 por 100. ¿Desde cuándo se está pagando?

30. Para enjugar en veinticinco años una deuda de 2 millones de pesetas, contraída al 3,5 por 100, ¿cuál ha de ser el pago anual?

FICHA-CLAVE DE LA AUTOEVALUACIÓN A-1

1. *b).*	**6.** *b).*	**11.** *c).*	**16.** *c).*
2. *c).*	**7.** *b).*	**12.** *d).*	**17.** *a).*
3. *b).*	**8.** *d).*	**13.** *b).*	**18.** *b).*
4. *d).*	**9.** *b).*	**14.** *b).*	**19.** *c).*
5. *a).*	**10.** *b).*	**15.** *d).*	**20.** *d).*

21. $V_{5,3}=60$.

22. $\binom{5}{3}=10$.

23. $VR_{6,4}=1\,296$.

24. $\binom{100}{2}=4\,950$.

25. $S=479\,226$.

26. $S_v=\dfrac{4(\sqrt{3}+1)}{3}R^3$.

27. 2, 8, 32.

28. 40 506 pesos.

29. Más de veinticinco años y menos de veintiséis.

30. 121 348,60 pesetas.

UNIDAD TEMATICA 2

POLINOMIOS

2.1. El anillo de los polinomios en Q

0. *Introducción*
1. *Una letra polifacética: la x*
2. *Monomios sobre el cuerpo racional Q*
3. *Polinomios sobre el cuerpo racional Q*
4. *Polinomio nulo*
5. *Grado de un polinomio*
6. *Relación de igualdad en el conjunto de los polinomios sobre Q*
7. *El anillo abeliano cancelativo de los polinomios en Q,* $[\mathcal{P}, +, x]$
8. *Potencia de un binomio*
9. *Polinomios y funciones polinómicas. Valor numérico*

2.2. División de polinomios

1. *División de polinomios en Q*
2. *Descomposición factorial de polinomios*
3. *Polinomios iguales. Método de identificación de coeficientes*

2.3. Divisibilidad. Divisibilidad en Z y en $\mathcal{P}[x]$

1. *Concepto de ideal*
2. *Ideales principales. Generador o base*
3. *Adición de ideales. Máximo común divisor. Números primos entre sí.*
4. *Intersección de ideales. Mínimo común múltiplo. Números primos.*
5. *Determinación del D y del M de dos números o dos polinomios*
6. *Aplicabilidad*

2.4. El cuerpo de fracciones de $\mathcal{O}[x]$

1. *Necesidad de ampliar* $\mathcal{O}[x]$
2. *Simetrización del anillo* $[\mathcal{O}[x], +, x]$
3. *Adición en* $\mathcal{F}[x]$
4. *Multiplicación en* $\mathcal{F}[x]$
5. *Distributividad de la multiplicación respecto de la adición en* $\mathcal{F}[x]$
6. *El cuerpo de fracciones de* $\mathcal{O}[x]$

2.5. Ejercicios y problemas de recapitulación

2.6. Autoevaluación A-2

2.1

El anillo de los polinomios en Q

0. INTRODUCCION

Desde la E. G. B. se sabe que «monomios» son expresiones del tipo

$$5x^4; \quad \frac{3}{5}x^1; \quad -4x^7; \quad \ldots,$$

y que polinomios son entes matemáticos que resultan de la adición de un número finito de monomios. Así,

$$3x^4+\frac{5}{4}x+\left(-\frac{3}{2}\right)x^3$$

es un polinomio.

También puede recordarse que, así como el escrito arriba es un polinomio monoindeterminado, los que se escriben con más de una letra son polinomios pluriindeterminados; como éste, por ejemplo,

$$\frac{3}{5}x^4y+\frac{2}{3}xy^2+2$$

Sin embargo, conviene profundizar un poco más en los conceptos e intentar la correcta matematización de esta cuestión de los polinomios.

Los objetivos de este tema son, entonces, los siguientes:

a) Creación del conjunto de los polinomios formales, $\mathcal{P}$, sobre un cuerpo K.

b) Establecimiento del anillo de los polinomios $(\mathcal{P}, +, \times)$, sobre un cuerpo K.

c) Estudio de la relación de divisibilidad sobre Z y sobre $\mathcal{P}$.

d) Simetrización del anillo de los polinomios y creación de su cuerpo de fracciones.

e) Aplicabilidad y automatización de toda la teoría construida.

1. UNA LETRA POLIFACETICA: LA x

La expresión $x^2-5x+6=0$ se dice que es una *ecuación* en Z, y la x aquí recibe el nombre de *incógnita.*

En este caso, la x representa el entero (o los enteros) que, sustituidos en su lugar, satisfacen la igualdad-ecuación.

Así, pues,

$$x \in Z.$$

En general, si la ecuación

$$E(x)=0$$

está establecida en un cuerpo K, x es el elemento (o elementos) de K que verifican la igualdad-ecuación.

Si se escribe $f: Q \to Q$, $f(x)=\frac{x}{3}+2$ se ha establecido una *función* cuyo dominio es el conjunto de los racionales, y cuyo recorrido también es el conjunto Q.

En una función, la x recibe el nombre de *variable* y representa cualquier elemento del dominio de definición.

Si se establece un *polinomio,* por ejemplo, $3x^4-2x+1$, la letra x recibe en este caso el nombre de *indeterminada,* y no representa nada; nada significa. Se puede llegar a decir que sólo sirve de soporte para el exponente de cada término.

Resumiendo:

ecuación	——	**incógnita**
función	——	**variable**
polinomio	——	**indeterminada**

2. MONOMIOS SOBRE EL CUERPO RACIONAL Q

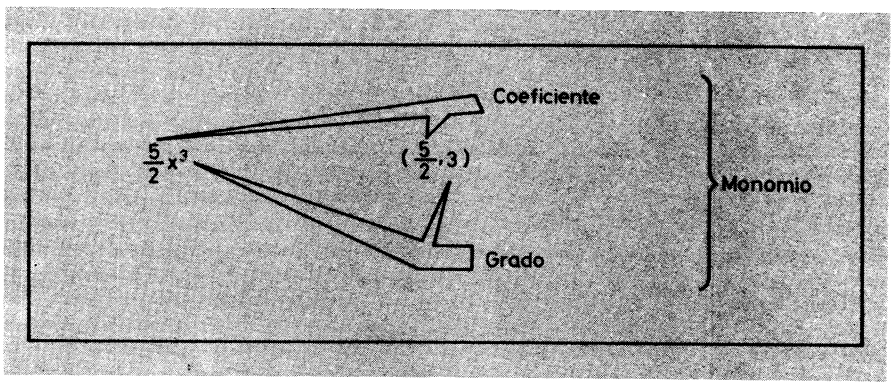
Se denomina «monomio sobre el cuerpo Q» a todo par (a, n) del cartesiano $Q \times N$, en el que la primera proyección, a, recibe el nombre de **coeficiente**, y la segunda proyección, n, se llama **grado.**

Conviene identificar esta definición formal con el modo tradicional de establecer un monomio. El siguiente ejemplo sirve para ello:

Ejemplo 1

$\left(\frac{2}{3}, 4\right)$ representa un monomio de coeficiente $\frac{2}{3}$ y de grado 4. La forma clásica de escribirlo es utilizando una indeterminada x, que soporta como exponente la proyección-grado. Así,

$$\frac{2}{3}x^4$$



De modo general, puede indicarse el grado como subíndice del coeficiente. De este modo:

$$(a, n) = ax^n = a_n .$$

Ejercicio 1

Exprésense, al modo clásico, los siguientes monomios:

a) $(-2, 3)$; *b)* $\left(-\frac{1}{5}, 1\right)$; *c)* $(3, 0)$; *d)* $(1, 1)$; *e)* $(0, 0)$.

Adviértase que no todo «par de números» es un monomio. Así, por ejemplo, $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{5}\right)$ no es un monomio, porque la proyección-grado no es natural, es decir, la expresión

$$\frac{2}{3}x^{1/5}$$

no es un monomio porque el «exponente» de la indeterminada no es natural.

Ejercicio 2

Dígase cuáles son y cuáles no son monomios de las siguientes expresiones:

a) $(1, 0)$; *b)* $\left(\frac{3}{5}, 1\right)$; *c)* $\left(\frac{2}{3}, -3\right)$.

3. POLINOMIOS SOBRE EL CUERPO RACIONAL *Q*

Establecido el concepto de monomio, se define como «polinomio», a la manera tradicional, la adición de un número finito de monomios:

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n \quad (\text{para } a_n\neq 0).$$

Teniendo en cuenta el concepto formal de monomio, y que esa x es una indeterminada que nada representa, puede definirse:

> Polinomio formal sobre el cuerpo Q es una sucesión indefinida de elementos de Q en la que son nulos todos los términos a partir de un determinado grado.

$$p=(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, 0, \ldots).$$

De modo abreviado, estas sucesiones polinómicas pueden representarse simbólicamente por un término general de orden $n+1$. Así:

$$p=[a_n];$$

y también, de este modo, pueden representarse sus $n+1$ términos:

$$p=\sum_0^n a_n.\ x^n$$

Ejemplo 2

El polinomio en Q, $p(x)=x^5-\frac{2}{3}x^3+x^2-2$ se escribe, en forma de sucesión de racionales, así:

$$p=\left(2, 0, 1, -\frac{2}{3}, 0, 1, 0, \ldots\right)$$

Obsérvese que se escribe primero el coeficiente del monomio de grado 0, y que los términos que no existen se han suplido poniendo 0.

Ejercicio 3

Escríbase la expresión formal de los siguientes polinomios:

a) $p(x)=3x^4-2$; *b)* $q(x)=\frac{2}{3}x^5+1$; *c)* $r(x)=x^2-2x^3+3$.

Definido el concepto formal de polinomio, ahora se pueden considerar los monomios como polinomios que tienen todos sus coeficientes nulos, excepto uno.

Ejemplo 3

El monomio $-2x^3$ puede representarse por el polinomio formal

$$(0, 0, 0, -2, 0, 0, \ldots).$$

4. POLINOMIO NULO

Se denomina así el polinomio cuyos coeficientes son todos nulos; es decir, de un modo formal, «polinomio nulo» es la sucesión

$$0 = (0, 0, 0, \ldots).$$

5. GRADO DE UN POLINOMIO

Considerando un polinomio formado por monomios, es costumbre decir que grado de un polinomio es el grado de su monomio de mayor grado.

Establecida la sucesión polinómica, el grado del polinomio resulta ser el índice de su último término no nulo.

Ejemplo 4

El polinomio $3x - 5x^4 + 2$ es de cuarto grado; en expresión formalizada

$$p = (2, 3, 0, 0, -5, 0, 0, \ldots)$$

$a_0 = 2$; $a_1 = 3$; $a_2 = 0$; $a_3 = 0$; $a_4 = -5 \Longrightarrow$ grado de p: cuarto.

Conviene advertir que el concepto de grado no tiene sentido para el polinomio nulo.

Ejercicio 4

Determínese el grado de los siguientes polinomios:

a) $\left(3, -\frac{1}{5}, 0, 0, \ldots\right)$; *b)* $(0, 2, 0, 0, \ldots)$; *c)* $(0, 0, 0, \ldots)$; *d)* $(3, 0, 0, \ldots)$.

6. RELACIÓN DE IGUALDAD EN EL CONJUNTO DE LOS POLINOMIOS SOBRE Q

Se define que dos polinomios A y B son iguales si, y solamente si, tienen iguales los coeficientes del mismo orden.

Obviamente, se trata de una relación de equivalencia por ser

— reflexiva,
— simétrica,
— transitiva.

A primera vista, este establecimiento parece trivial; más adelante veremos la gran importancia que toma en la aplicación de los principios de especialización y de identidad de polinomios.

7. EL ANILLO ABELIANO CANCELATIVO DE LOS POLINOMIOS EN Q, $[\mathcal{P}, +, \times]$

7.1. El grupo aditivo abeliano $[\mathcal{P}, +]$

Se define sobre $\mathcal{P}$ la siguiente adición: la suma de dos polinomios $A=[a_i]$ y $B=[b_i]$ es el polinomio obtenido al sumar los coeficientes del mismo orden de A y de B.

Es conveniente darse cuenta de que, de este modo, queda establecida la adición en $\mathcal{P}$ como una aplicación del cartesiano $\mathcal{P}\times\mathcal{P}$ en $\mathcal{P}$, con el criterio que queda escrito:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}\times\mathcal{P} & \xrightarrow{+} & \mathcal{P} \\ (A, B) & \longrightarrow & C \\ ([a_i], [b_i]) & \longrightarrow & [a_i + b_i] \end{array}$$

Ejemplo 5

Súmense los polinomios

$$\begin{array}{r} A=(2, 0, -1/3, 0, 0, \ldots) \\ B=(0, -1, 0, 7, 0, 0, \ldots) \\ \hline A+B=(2, -1, -1/3, 7, 0, 0, \ldots) \end{array}$$

Ejemplo 6

Súmense los polinomios

$$\begin{array}{r} M=7x^4-2x^3-1 \\ N=x^2-5x^4+x^3-1/5 \\ \hline M+N=(7-5)x^4+(-2+1)x^3+x^2-1-1/5 \\ M+N=2x^4-x^3+x^2-6/5 \end{array}$$

La operación que se acaba de definir goza de las siguientes propiedades:

I. *Asociatividad:*

$$(A+B)+C=A+(B+C).$$

Es fácil ver por qué: como los coeficientes son elementos de Q y los racionales tienen la adición asociativa, la adición de polinomios en Q también lo es.

II. *Existencia de elemento neutro:*

$$\forall A \in \wp, \quad A + O = O + A = A.$$

(O) es el polinomio nulo.

$$O = (0, 0, 0, \ldots).$$

III. *Existencia de elementos opuestos:*

$$\forall A \in \wp, \quad \exists^*(-A) \in \wp / A + (-A) = (-A) + A = (O).$$

Es claro que si

$$A = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots),$$

su opuesto

$$(-A) = (-a_0, -a_1, -a_2, \ldots, -a_n, 0, 0, \ldots).$$

IV. *Conmutatividad:*

$$A + B = B + A.$$

La razón es que la adición de racionales es conmutativa.
Por cumplirse las propiedades apuntadas se dice que

> La adición dota al conjunto de los polinomios de estructura de grupo abeliano.

Ejercicio 5

Súmense los siguientes polinomios:

a) $A = 3x^2 - 5x + 1/5$; $B = (8, -1/3, -2/5, 1, 0, 0, \ldots)$;

b) $A = (2/3, -1, 0, 0, \ldots)$; $B = (-1/5, 2/3, -1/4, 0, 0, \ldots)$;

c) $A = (-1/3, 2, 0, 0, \ldots)$; $B = (-1/2, 1/5, 2/7, 0, 0, \ldots)$;

$C = (0, 0, -1/4, 0, 0, \ldots)$.

Polinomio-diferencia. Gracias a la existencia de la propiedad III puede definirse el polinomio-diferencia de otros dos dados A y B como la adición del primero, denominado «minuendo», con el opuesto del segundo, llamado «sustraendo».

$$A - B = A + (-B)$$

Ejemplo 7

Dados los polinomios

$$A=\frac{3}{5}x^4-\frac{2}{3}x^2+1 \quad \text{y} \quad B=\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2-\frac{3}{5}x+2,$$

determínese su diferencia.

$$\begin{aligned} A-B &= \left(\frac{3}{5}x^4-\frac{2}{3}x^2+1\right)-\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2-\frac{3}{5}x+2\right)= \\ &= \left(\frac{3}{5}x^4-\frac{2}{3}x^2+1\right)+\left(-\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{3}{5}x-2\right)= \\ &= \frac{3}{5}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{3}{5}x-1. \end{aligned}$$

Ejercicio 6

Determínese el polinomio-diferencia de los de las dos primeras partes del ejercicio 5.

Producto de un polinomio por un escalar del anillo de integridad *Z*

Considérense un $\lambda \in Z$ y un polinomio $A \in \mathcal{P}$,

$$A=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n.$$

Por definición, decimos que el producto $\lambda \cdot A$ es el polinomio que resulta al multiplicar todos los coeficientes de A por el escalar λ.

$$\lambda \cdot A=\lambda a_0+\lambda a_1x+\lambda a_2x^2+\ldots+\lambda a_nx^n.$$

Esta ley de composición externa

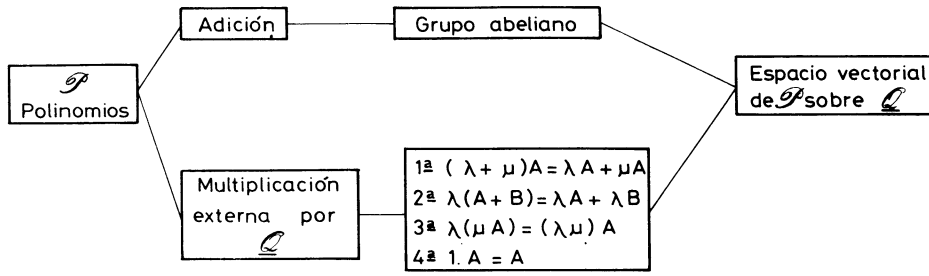
$$\begin{aligned} Z \times \mathcal{P} &\to \mathcal{P} \\ (\lambda, A) &\to (\lambda \cdot A) \end{aligned}$$

tiene las siguientes propiedades, consecuencias inmediatas de las reglas de cálculo en anillos:

primera: $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$;
segunda: $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$;
tercera: $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$;
cuarta: $1 \cdot A=A$.

Obsérvese, entonces, que, sobre el grupo aditivo abeliano de los polinomios $[\mathcal{P}, +]$ hemos creado una ley de composición externa, la multiplicación por elementos de Z, que goza de las cuatro propiedades apuntadas.

Si en lugar de utilizar escalares de Z, se hubieran usado elementos del cuerpo Q, se hubiera conseguido una estructura muy rica: el espacio vectorial de los polinomios en x, sobre el cuerpo Q, de los racionales.



7.2. El semigrupo multiplicativo abeliano con elemento unidad, [℘, ×]

Antes de definir la multiplicación en ℘, establezcamos el concepto de producto de monomios.

Si se simboliza por $\mathcal{M}$ el conjunto de los monomios en Q, diremos que la multiplicación de dos monomios es la aplicación siguiente:

$$\mathcal{M} \times \mathcal{M} \xrightarrow{\times} \mathcal{M}$$
$$(a_i, n_i), (a_j, n_j) \longrightarrow (a_i \cdot a_j, n_i + n_j)$$

La expresión formal del recuadro significa que el producto de dos monomios es otro monomio cuyo coeficiente es el producto de los coeficientes, y cuyo grado es la suma de los grados.

Los monomios operados se llaman «multiplicando» y «multiplicador»; el resultado se denomina «producto».

Ejemplo 8

$$\left(\frac{3}{5}, 2\right) \times \left(\frac{2}{3}, 1\right) = \left(\frac{2}{5}, 3\right); \qquad \left(\frac{3}{5}x^2\right) \times \left(\frac{2}{3}x^1\right) = \frac{2}{5}x^3$$

Una vez definido el producto de monomios se establece la multiplicación de polinomios de este modo. Sean los polinomios

$$A = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k$$
$$B = b_0 + b_1x^1 + b_2x^2 + \ldots + b_jx^j.$$

El producto de esos polinomios es otro polinomio, que se obtiene multiplicando cada uno de los monomios del A por todos los del B, y sumando después los de igual grado:

$$A \times B = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \ldots + a_kb_jx^{k+j}.$$

Ejemplo 9

Multiplíquense los polinomios

$$A = 3x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1 \quad \text{y} \quad B = 2x^3 + \frac{1}{4}x - 2.$$

Dos son los modos prácticos de disponer la operación.

Primera manera:

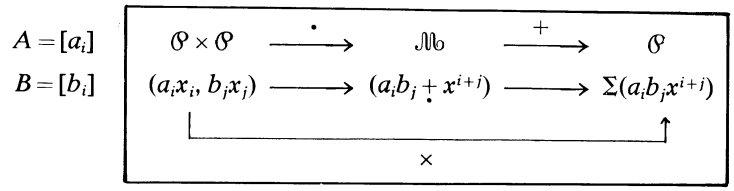
$$\begin{array}{l} 3x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1 \\ 2x^3 + \frac{1}{4}x - 2 \\ \hline 6x^7 \quad -x^5 \quad +2x^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2x^3 \cdot A \\ \quad +\frac{3}{4}x^5 \quad -\frac{1}{8}x^3 \quad +\frac{1}{4}x \quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{4}x \cdot A \\ \quad -6x^4 \quad +x^2 \quad -2 \quad \ldots \quad -2 \cdot A \\ \hline 6x^7 - \frac{1}{4}x^5 - 6x^4 + \frac{15}{8}x^3 + x^2 + \frac{1}{4}x - 2 \end{array}$$

Segunda manera:

B \ A = (1	0	−1/2	0	3)			
−2	0	+1	0	−6			
1/4	+1/4	0	−1/8	0	3/4		
0	0	0	0	0	0		
+2			2	0	−1	0	6

A x B=(−2 , +1/4 , 1 , 15/8 , −6 , −1/4 , 0 , 6 , 0 , 0 ,...)

Entendiendo los polinomios multiplicando y multiplicador como conjuntos de sus monomios integrantes, puede intentarse la formalización de la multiplicación de polinomios, arriba establecida, como la composición de las dos aplicaciones que se simbolizan en el siguiente esquema.



Ejercicio 7

Dados los polinomios

$$A = (5, -3/4, 0, -2, 0, 0, \ldots)$$

$$B = \frac{2}{3}x^2 + 5x - \frac{1}{3}$$

$$C = x^2 - 3$$

$$D = (1, 0, -2, 0, 0, \ldots).$$

Calcúlense $A \times B$, $A \times C$, $B \times C$, $C \times D$, $A \times D$.

La multiplicación de polinomios sobre Q, que se acaba de establecer, goza de las siguientes propiedades:

V. *Asociatividad:*

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C).$$

VI. *Conmutatividad:*

$$A \times B = B \times A.$$

VII. *Existencia de elemento unidad:*

$$\forall A \in \mathcal{P}, \quad \exists I = (1, 0, 0, \ldots) / A \times I = I \times A = A.$$

Las tres propiedades expresadas, de inmediata justificación, permiten escribir:

> La multiplicación dota al conjunto de los polinomios de estructura de semigrupo abeliano con elemento unidad.

Pero, además, hay una propiedad que liga la adición y multiplicación:

VIII. *Distributividad de la multiplicación respecto de la adición:*

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C.$$

Ya que gozan de la misma propiedad los coeficientes racionales que los constituyen.

Teniendo en cuenta que:

a) la adición dota al conjunto de los polinomios de estructura de grupo abeliano;

b) la multiplicación dota al conjunto de los polinomios de estructura de semigrupo abeliano con elemento unidad;

c) la multiplicación es distributiva respecto de la adición,

se puede afirmar:

> El conjunto de los polinomios sobre Q, dotado de la adición y la multiplicación, alcanza la estructura de anillo abeliano con elemento unidad.

Lástima que en el conjunto de los polinomios no haya, salvo en dos casos, elementos simétricos, porque si todo polinomio tuviera simétrico, su estructura sería «más que anillo», llegaría a ser un cuerpo. Pero no lo es.

Ejercicio 8

Dados los polinomios sobre Q:

$$A = \frac{1}{4}x^2 + 5x - \frac{4}{3}$$

$$B = -2x^3 - \frac{1}{4}x + 3$$

$$C = x^2 - \frac{1}{3}x,$$

calcúlense:

a) $A + B + C$; *b)* $A + B - C$; *c)* $B \times C$;

d) $B \times C + B$; *e)* $B \times (C + B)$; *f)* $-2B + \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}x - C.$

8. POTENCIA DE UN BINOMIO

8.1. Introducción

Al igual que $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$; $p \cdot p \cdot p \cdot \ldots$ (n veces $= p^n$, para un polinomio de dos términos, o sea, para un binomio, sucede que

$$(a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b) \ldots (n \text{ veces} = (a+b)^n.$$

Ejemplo 10

$$(x+3)^4 = (x+3) \cdot (x+3) \cdot (x+3) \cdot (x+3)$$

$$\begin{array}{r} x+3 \\ x+3 \\ \hline x^2+3x \\ \quad 3x+9 \\ \hline (x+3)^2 \rightarrow \quad x^2+6x+9 \\ (x+3)^2 \rightarrow \quad x^2+6x+9 \\ \hline x^4+6x^3+\ 9x^2 \\ \quad 6x^3+36x^2+\ 54x \\ \quad\quad 9x^2+\ 54x+81 \\ \hline (x+3)^4 \rightarrow \quad x^4+12x^3+54x^2+108x+81 \end{array}$$

Ejercicio 9

Calcúlense, por sucesivas multiplicaciones,

a) $(x+2)^3$; *b)* $\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^3$.

8.2. Fórmula de Newton

Muy engorroso resulta el cálculo de estas potencias por sucesivas multiplicaciones. Existe una fórmula general, denominada «el binomio de Newton», que permite dar el resultado sin hacer esas multiplicaciones sucesivas. Es ésta:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n} b^n$$

Veamos cómo funciona:

Ejemplo 11

$$(x+2)^3 = \binom{3}{0} x^3 + \binom{3}{1} x^2 \cdot 2 + \binom{3}{2} x \cdot 2^2 + \binom{3}{3} 2^3 =$$
$$= 1 \cdot x^3 + 3 \cdot 2x^2 + 3 \cdot 4x + 1 \cdot 8 =$$
$$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8.$$

Ejercicio 10

Aplicando la fórmula del desarrollo de Newton, calcúlese $(x+3)^4$.

La demostración de la fórmula de Newton se hace por inducción o recurrencia.

Este método de demostración, muy usado para proposiciones referibles a los números naturales, consta de tres fases.

Establecida la tesis $T(n)$ en función del natural n:

Primera fase: se comprueba si es correcta para $n = 1, 2, \ldots$ *;

Segunda fase: se postula que la tesis es correcta para cualquier n;

Tercera fase: se demuestra que, siendo correcta para n, lo es para $n+1$.

Apliquemos el método para la justificación de la fórmula de Newton:

Primera fase:

para $n = 1$:

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0} a^1 + \binom{1}{1} b^1 = a + b;$$

para $n = 2$

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} ab + \binom{2}{2} b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Segunda fase: Postulemos que es correcto para cualquier n:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n} b^n. \qquad [1]$$

Tercera fase: Demostremos que es válida para $n+1$, tomando como hipótesis la fase anterior.

Multipliquemos el primer miembro de [1] por $(a+b)$:

$$(a+b)^n \cdot (a+b) = (a+b)^{n+1}$$

---

* No es posible, en este curso, extenderse en consideraciones sobre la suficiencia de probar uno, dos, tres, etc., valores naturales consecutivos.

y también el segundo miembro:

$$(a+b)\cdot\left[\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\ldots+\binom{n}{n}b^n\right]=$$

$$=\binom{n}{0}a^{n+1}+\binom{n}{1}a^nb+\binom{n}{2}a^{n-1}b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}a^2b^{n-1}+\binom{n}{n}ab^n$$

$$\binom{n}{0}a^nb+\binom{n}{1}a^{n-1}b^2+\binom{n}{2}a^{n-2}b^3+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^n+\binom{n}{n}b^{n+1}$$

Al sumar, se tiene en cuenta que

$$\binom{n+1}{0}=\binom{n}{0},$$

y que

$$\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\binom{n+1}{p+1}.$$

Suma: $\binom{n+1}{0}a^{n+1}+\binom{n+1}{1}a^nb+\binom{n+1}{2}a^{n-1}b^2+\ldots+\binom{n+1}{n+1}b^{n+1}.$

Luego:

$$(a+b)^{n+1}=\binom{n+1}{0}a^{n+1}+\binom{n+1}{1}a^nb+\binom{n+1}{2}a^{n-1}b^2+\ldots+\binom{n+1}{n+1}b^{n-1}.$$

Queda justificado que cuando el exponente del binomio es $n+1$ también se mantiene la forma del desarrollo.

Ejercicio 11

Calcúlese

$$\left(2x+\frac{1}{5}\right)^5.$$

8.3. Triángulo de Tartaglia

Hay una forma práctica de determinar los coeficientes de los términos de un desarrollo de Newton.

Si se disponen, como se hace, los coeficientes combinatorios y se calculan, se observa que los extremos de fila son siempre 1, y que cada uno de los otros se obtiene de la adición de los dos próximos de la fila superior, lo cual no es más que consecuencia de la propiedad, ya vista, de los números combinatorios

$$\binom{n+1}{p+1}=\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}$$

$$
\begin{array}{ll}
(a+b)^0 & \binom{0}{0} \\
(a+b)^1 & \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
(a+b)^2 & \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
(a+b)^3 & \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
(a+b)^4 & \binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
(a+b)^5 & \binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \\
\ldots & \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
(a+b)^0 & 1 \\
(a+b)^1 & 1 \quad 1 \\
(a+b)^2 & 1 \quad 2 \quad 1 \\
(a+b)^3 & 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
(a+b)^4 & 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
(a+b)^5 & 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
 & \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots
\end{array}
$$

Ejercicio 12

a) *Establézcase en forma combinatoria, y operados los coeficientes, el desarrollo de la sexta potencia de un binomio.*

b) *Calcúlese* $(2+x)^6$.

8.4. Potencia de binomios con signo menos

Nada de particular presentan los desarrollos de binomios cuyo segundo término es negativo. Basta observar el ejemplo siguiente para entenderlo.

Ejemplo 12

$$(3-a)^4 = (3+(-a))^4 =$$

$$= \binom{4}{0} 3^4 + \binom{4}{1} 3^3 (-a) + \binom{4}{2} 3^2(-a)^2 + \binom{4}{3} 3(-a)^3 + \binom{4}{4} (-a)^4 =$$

$$= 81 - 108a + 54a^2 - 12a^3 + a^4.$$

De modo práctico, puede observarse que el resultado final del desarrollo de la potencia de una diferencia tiene alternados los signos más y menos.

Ejercicio 13

Calcúlense:

a) $(1-a)^5$; *b)* $\left(\frac{2}{3}-x\right)^3$; *c)* $\left(3x-\frac{1}{2}x^2\right)^4$; *d)* $\left(x-\frac{x}{2}\right)^4$.

8.5. Cálculo del término de lugar k en el desarrollo de $(a+b)^n$ y de $(a-b)^n$

Con frecuencia interesa solamente uno de los términos de los $n+1$ del desarrollo y, entonces, conviene evitar el trabajo superfluo * de realizar todo el desarrollo.

Observando el desarrollo de la fórmula de Newton para $(a+b)^n$ se puede conseguir un término general simbólico que represente a todos y a cada uno de los términos. Es éste:

$$\boxed{T_k=\binom{n}{k-1}a^{n-(k-1)}b^{k-1}} \qquad [2]$$

En efecto; si se trata, por ejemplo, del tercer término del desarrollo, se convierte en

$$T_3=\binom{n}{2}a^{n-2}b^2.$$

El quinto tomaría la forma

$$T_5=\binom{n}{4}a^{n-4}b^4.$$

Ejemplo 13

Determínese solamente el término séptimo del desarrollo $(2+x)^{15}$:

$$T_7=\binom{15}{6}2^{15-6}x^6=2\,562\,560x^6.$$

Ejemplo 14

Determínese el término de grado 9 en el desarrollo de $\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^6$:

$$T_k=\binom{6}{k-1}(x^2)^{6-k+1}\left(\frac{2}{x}\right)^{k-1}$$

$$T_k=\binom{6}{k-1}x^{14-2k}\cdot\frac{2^{k-1}}{x^{k-1}}$$

* Innecesario.

$$T_k = \binom{6}{k-1} 2^{k-1} \cdot \frac{x^{14-2k}}{x^{k-1}}$$

$$T_k = \binom{6}{k-1} 2^{k-1} x^{15-3k}$$

Si se pretende que el término k sea de grado 9, ha de cumplirse que

$$x^{15-3k} = x^9 \implies 15 - 3k = 9 \implies k = 2$$

Luego

$$T_2 = \binom{6}{1} 2^1 x^9; \qquad T_2 = 12x^9.$$

Ejercicio 14

En el desarrollo de $\left(x^3 + \frac{2}{x}\right)^{20}$, *determínense:*

a) *el término de lugar decimosexto;*

b) *el término independiente (es decir, de grado* 0);

c) *la diferencia entre estos términos.*

¿Cuál será el término general para un desarrollo de un binomio-diferencia?

La fórmula [2] es válida para determinar su valor absoluto, y habrá que «inventar» algo para saber si es o no negativo ese término, T_k.

En el ejemplo 12 se puede observar que los términos de lugar impar son positivos, siendo negativos los de lugar par, de modo que si k es impar, T_k será positivo y negativo, en caso de que k sea par.

Con esta observación basta poner en la fórmula [2] el factor $(-1)^{k-1}$ para tener el signo de T_k. Así:

$$\boxed{T_k = (-1)^{k-1} \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^{k-1}} \qquad [2']$$

Ejemplo 15

Calcúlese el término independiente del desarrollo $\left(2a - \frac{1}{a^2}\right)^{18}$

$$T_k = (-1)^{k-1} \binom{18}{k-1} (2a)^{19-k} \left(\frac{1}{a^2}\right)^{k-1}$$

$$T_k = (-1)^{k-1} \binom{18}{k-1} 2^{19-k} \cdot a^{19-k} \cdot a^{-2k+2}$$

$$T_k = (-1)^{k-1} \binom{18}{k-1} 2^{19-k} \cdot a^{21-3k}$$

$$a^{21-3k} = a^0 \implies 21 - 3k = 0 \implies k = 7$$

$$T_7 = (-1)^6 \binom{18}{6} 2^{12} a^0$$

$$T_7 = 76\,038\,144$$

Ejercicio 15

Determínese el término de quinto grado en el desarrollo de $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^{10}$.

9. POLINOMIOS Y FUNCIONES POLINOMICAS. VALOR NUMERICO

Considérese el polinomio sobre Q, $p(x)=x^3-x+2$; o mejor, de un modo formal,

$$p=(2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ \ldots).$$

A este polinomio formal le hacemos corresponder la función racional que resulta al considerar su indeterminada como variable en Q. Así:

$$p=(2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ \ldots) \longrightarrow f(x)=x^3-x+2.$$

Ahora establecemos otra aplicación entre la función recién establecida y el conjunto de los racionales Q, cuyo criterio es «sustituir por $a\in Q$ la variable», de modo que, si $a=1/2$, por ejemplo,

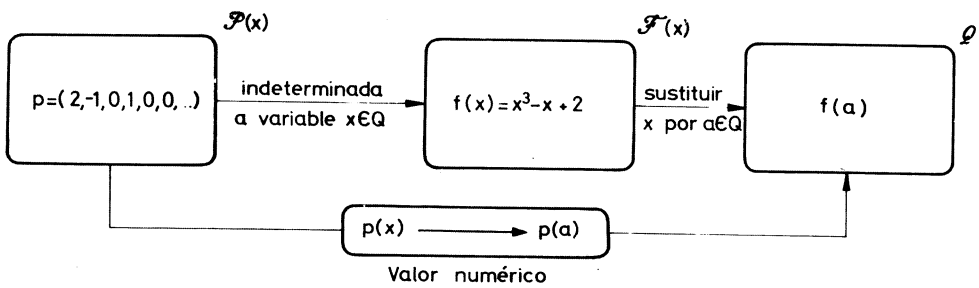
$$f(x)=x^3-x+2 \longrightarrow \frac{1}{8}-\frac{1}{2}+2=\frac{13}{8}.$$

Como el producto de dos aplicaciones es otra aplicación, puede establecerse la que hace corresponder al polinomio p directamente el valor 13/8.

$$p=(2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ \ldots) \xrightarrow{a=1/2} \frac{13}{8}$$

Esta aplicación del conjunto de los polinomios $\mathcal{P}[x]$ en el conjunto de los racionales Q se denomina **valor numérico** para $a\in Q$.

Todo lo dicho se recoge en el esquema siguiente:



Ejercicio 16

Determínese el valor numérico de los tres polinomios del ejercicio 8 para $a=-1/2$.

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 2.1

1. *a)* $-2x^3$;
b) $-1/5\,x^1 = -1/5\,x$;
c) $3x^0 = 3$;
d) $1 \cdot x^1 = x$;
e) $0 \cdot x^0 = 0 \cdot 1 = 0$.

2. *a)* es monomio;
b) es monomio;
c) no es monomio.

3. *a)* $p = (-2, 0, 0, 0, 3, 0, 0, \ldots)$;
b) $q = (1, 0, 0, 0, 0, 2/3, 0, 0, \ldots)$;
c) $r = (3, 0, 1, -2, 0, 0, \ldots)$.

4. *a)* primer grado;
b) primer grado;
c) el polinomio nulo no tiene grado;
d) grado cero.

5. *a)* $(41/5, -16/3, +13/5, 1, 0, 0, \ldots)$;
b) $(7/15, -1/3, -1/4, 0, 0, \ldots)$;
c) $(-5/6, +11/5, +1/28, 0, 0, \ldots)$.

6. *a)* $(-39/5, -14/3, 17/5, -1, 0, 0, \ldots)$;
b) $(13/15, -5/3, 1/4, 0, 0, \ldots)$.

7. $A \times B = (-5/3, 101/4, -5/12, 1/6, -10, -4/3, 0, 0, \ldots)$;
$A \times C = (-15, 9/4, 5, 21/6, 0, -2, 0, 0, \ldots)$;
$B \times C = (1, -15, -7/3, 5, 2/3, 0, 0, \ldots)$;
$C \times D = (-3, 0, 6, 0, -2, 0, 0, \ldots)$;
$A \times D = (5, -3/4, -15, -1/2, 0, 4, 0, 0, \ldots)$.

8. *a)* $-2x^3 + 5/4x^2 + 53/12x + 5/3$;
b) $-2x^3 - 3/4x^2 + 61/12x + 5/3$;
c) $-2x^5 + 2/3x^4 - 1/4x^3 + 37/12x^2 - x$;
d) $-2x^5 + 2/3x^4 - 9/4x^3 + 37/12x^2 - 5/4x + 3$;
e) $4x^6 - 2x^5 + 5/3x^4 - 49/4x^3 + 151/48x^2 - 5/2x + 9$;
f) $4x^3 - 11/2x^2 + 19/6x - 58/9$.

9. *a)* $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$;
b) $x^6 - x^4 + 1/3x^2 - 1/27$.

10. $x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81$.

11. $32x^5 + 16x^4 + 16/5x^3 + 8/25x^2 + 2/125x + 1/3125$.

12. *a)* $1a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + 1b^6$;
b) $64 + 192x + 240x^2 + 160x^3 + 60x^4 + 12x^5 + x^6$.

13. *a)* $1 - 5a + 10a^2 - 10a^3 + 5a^4 - a^5$;
b) $8/27 - 4/3x + 2x^2 - x^3$;
c) $81x^4 - 54x^5 + 27/2x^6 - 3/2x^7 + x^8/16$;
d) $x^4 - 2x^4 + 3/2x^4 - x^4/2 + x^4/16$.

14. *a)* $T_{16} = 19 \cdot 17 \cdot 3 \cdot 2^{19}$;
b) el término independiente es T_{16};
c) $T_{16} - T_{16} = 0$.

15. $T_5 = (-252x^5)$.

16. $A(-1/2) = -181/48$; $B(-1/2) = 27/8$; $C(-1/2) = 5/12$.

2.2

División de polinomios

1. DIVISION DE POLINOMIOS EN Q

1.1. División exacta

Dados dos polinomios A y B, definidos en Q, es posible que exista otro polinomio C, tal que

$$A = B \times C.$$

Si existe C, se dice que es el resultado de dividir el polinomio A por el B, y se denomina «polinomio-cociente».

La existencia de C indica que el polinomio A es divisible por el B.

Ejemplo 16

$$\frac{x^2-1}{x-1} = x+1, \text{ ya que } x^2-1 = (x+1)(x-1).$$

Ejemplo 17

Determínese, si existe, el polinomio-cociente de los

$$A = x^2+1 \quad \text{y} \quad B = x-1.$$

De existir, ha de ser un polinomio de primer grado, de esta forma:

$$C = ax+b.$$

Y ha de cumplirse que

$$x^2+1=(x-1)(ax+b)=ax^2+bx-ax-b=ax^2+(b-a)x-b.$$

El polinomio A y el que ha resultado de multiplicar el B y el C han de ser polinomios iguales y, por tanto, sus coeficientes de igual grado han de ser iguales, lo que supone

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{— coeficientes de segundo grado: } 1=a\\ \text{— coeficientes de primer grado: } 0=b-a\end{array}\right\}\Longrightarrow b=1\\ \text{— coeficientes independientes: } 1=-b\Longrightarrow b=-1\end{array}\right\}\text{ imposibles.}$$

Conclusión: No existe un polinomio cociente C de x^2+1 y de $x-1$; o, con otras palabras,

el polinomio $A=x^2+1$ no es divisible por el polinomio $B=x-1$.

Ejercicio 17

Determínese, si existe, el polinomio-cociente del $A=x^4-x^3+3x^2-2x+2$ *y el* $B=x^2+2$.

1.2. División euclídea

Empecemos estableciendo sobre el conjunto de los polinomios una relación de equivalencia, que llamaremos «relación de congruencia», módulo M.

a) *Establecimiento de la relación*

Dos polinomios, A y B, son congruentes, módulo otro polinomio M, si, y solamente si, su diferencia es divisible por el módulo.

Esta definición se simboliza así:

$$A\equiv B(M \iff A-B=\dot{M}.$$

Ejemplo 18

Los polinomios $A=x^3+2x^2-3$ y $B=x^3+x^2-2$ son congruentes, módulo $M=x+1$. En efecto:

$$A-B=x^3+2x^2-3-x^3-x^2+2=x^2-1$$
$$x^2-1=(x+1)(x-1)$$
$$x^2-1=\dot{\overline{x+1}}$$

b) *Análisis de la relación*

La relación de congruencia es

1. **Reflexiva:**

$$A \equiv A(M, \text{ ya que } A - A = 0 \text{ y } 0 = \dot{M}.$$

2. **Simétrica:**

$$A \equiv B(M \Longrightarrow A - B = \dot{M} \Longrightarrow B - A = \dot{M} \Longrightarrow B \equiv A(M.$$

3. **Transitiva:**

$$\begin{aligned} A \equiv B(M &\Longrightarrow A - B = \dot{M} \\ B \equiv C(M &\Longrightarrow \underline{B - C = \dot{M}} \\ & \qquad A - C = \dot{M} \Longrightarrow A \equiv C(M. \end{aligned}$$

Por cumplir estas tres propiedades, la relación de congruencia es una relación de equivalencia sobre el conjunto de los polinomios en Q.

c) *Acción de la relación sobre* $\mathcal{P}[x]$

La relación de congruencia clasifica y parte al conjunto de los polinomios en subconjuntos disjuntos, cada uno de los cuales es una clase de congruencia.

Resulta así el conjunto-cociente, cuyos elementos son las clases de congruencia, módulo M

$$C = \mathcal{P}[x]/M = \{\{A, B, \ldots\}, \{P, Q, \ldots\}, \{T, V, \ldots\}\}.$$

d) Surge ahora el problema de determinar cuál de los polinomios congruentes de cada clase va a ser el representante canónico de ella. Parece lógico escoger el más sencillo de todos, el de menor grado.

Sean dos polinomios A y B, que se pueden descomponer como se indica:

$$\begin{aligned} A &= M \cdot C_1 + R \\ B &= M \cdot C_2 + R \end{aligned} \qquad [1]$$

Establezcamos su diferencia

$$A - B = M(C_1 - C_2)$$

$$A - B = \dot{M} \Longrightarrow A \equiv B(M.$$

Queda demostrado que dos polinomios que admiten la descomposición utilizada pertenecen a la misma clase.

¿Y el polinomio R, a qué clase pertenece?

De la igualdad [1] se puede escribir:

$$A - R = M \cdot C_1$$

$$A - R = \dot{M} \Longrightarrow A \equiv R(M.$$

Queda claro que R es un polinomio que pertenece a la misma clase de los A y B.

Además se demuestra (en otros niveles) que es único y el de menor grado posible de su clase.

Por todo ello se le escoge como representante canónico de su clase de congruencia.

La técnica para calcular los polinomios C_1 y R que cumplen la condición

$$A = M \cdot C_1 + R$$

se denomina *división euclídea* del polinomio-dividendo A, entre el «polinomio-divisor» M; el C_1 recibe el nombre de «polinomio-cociente» y R es el «polinomio-resto».

También se encuentra justificado, donde procede, la corrección del algoritmo * que se desarrolla en el siguiente ejemplo, por otra parte ya conocido de aprendizajes anteriores.

Ejemplo 19

$$\begin{array}{r|l} x^5 - 2x^4 \quad -4x^2 + 3x - 1 & x^3 + 2x - 1 \\ \hline -x^5 \quad -2x^3 + x^2 & x^2 - 2x - 2 \\ \hline -2x^4 - 2x^3 - 3x^2 & \\ +2x^4 \quad +4x^2 - 2x & \\ \hline -2x^3 + x^2 + x & \\ +2x^3 \quad +4x - 2 & \\ \hline x^2 + 5x - 3 & \end{array}$$

Ejercicio 18

Determínense el polinomio-cociente y el polinomio-resto de la división de

$$A = x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 1 \quad \text{y} \quad B = x^2 - 3x + 2.$$

Ejercicio 19

¿A qué clase de congruencia, módulo $x^2 + 1$, pertenece el polinomio $x^3 - 1$?

Ejercicio 20

¿Respecto de qué módulos pueden ser congruentes los polinomios

$$A = x^4 + 2x^2 - 2 \quad y \quad B = x^4 + x^2 - 1?$$

---

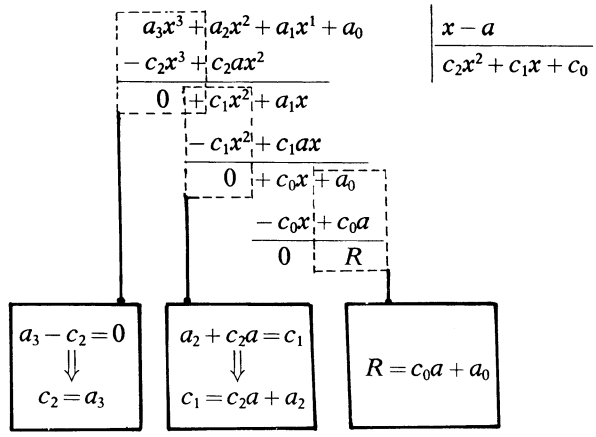
* Algoritmo = operación algebraica. Etimológicamente, procede de *Algoritmi*, traducción latina de ALCHWARIZMI, famoso algebrista árabe del siglo VIII.

1.3. División por $(x-a)$

1.31. Regla de Ruffini

Cuando se trata de dividir un polinomio por el divisor $x-a$, en el que $a \in Q$, existe una regla muy cómoda para hacerlo, que pasamos a desarrollar.

Realicemos la siguiente división:



Se observa que:

1) El grado del cociente es una unidad menor que el grado del dividendo.
2) El primer coeficiente del cociente coincide con el primer coeficiente del dividendo.
3) Cada uno de los restantes coeficientes del cociente se obtiene multiplicando el anterior por a y sumándole el correspondiente coeficiente del dividendo.
4) El resto se obtiene multiplicando el último coeficiente del cociente y sumándole el término independiente del dividendo.

El texto del recuadro constituye la «regla de Ruffini» para dividir un polinomio por $x-a$.

La disposición práctica facilita mucho el cálculo, manejando sólo los coeficientes, tal como se expone en este esquema:

	a_0	a_1	a_2	a_3
		+	+	
a		a_0a	c_1a	c_2a
	a_0	c_1	c_2	R

Ejemplo 20

Divídase x^3+3x-2 entre $x-3$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 3 & & 3 & 9 & 36 \\ \hline & 1 & 3 & 12 & \lfloor 34 \end{array}$$

Cociente: $1x^2+3x+12$.
Resto: 34.

Ejercicio 21

Mediante la regla de Ruffini, realícense las siguientes divisiones:

a) $(x^4-3x+1) : (x-2)$;

b) $(x^3+2x+4) : \left(x-\frac{1}{2}\right)$.

Todo lo hasta ahora expuesto es válido también si el divisor es un binomio suma, por ejemplo, $(x+2)$. Basta darse cuenta entonces que $(x+2)=(x-[-2])$, lo que quiere decir que a vale -2.

Ejemplo 21

Divídase, usando la regla de Ruffini:

$$(x^3-2x+1) : (x+2)$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & & -2 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & \lfloor -3=R \end{array}$$

Cociente: x^2-2x+2.
Resto: -3.

Ejercicio 22

Divídase, usando la regla de Ruffini:

$$(x^3+x^2-2) : \left(x+\frac{1}{2}\right).$$

1.32. Estudio del resto de la división por $(x-a)$

Sea la división

$$\begin{array}{c|c} A(x) & x-a \\ \hline R & B(x) \end{array} \iff A(x)=(x-a)B(x)+R \qquad [1]$$

La igualdad de polinomios [1] implica la igualdad de sus valores numéricos para $x=a$. De modo que, sustituyendo x por a, resulta:

$$A(a)=(a-a)B(a)+R$$
$$A(a)=0\cdot B(a)+R$$

$$\boxed{A(a)=R} \qquad [2]$$

La expresión recuadrada constituye el llamado «teorema del resto», que se enuncia:

> TEOREMA DEL RESTO: El resto de la división de un polinomio $A(x)$ por el binomio $x-a$ coincide con el valor numérico de dicho polinomio para $x=a$.

Ejemplo 22

Determínese el resto de la división

$$A(x)=(x^3+3x-2) \text{ entre el binomio } x-3.$$

Resto: $A(3)=3^3+3\cdot 3-2=34$.
(Consúltese el ejemplo 20.)

Ejercicio 23

Calcúlese el resto de la división del polinomio

$$A(x)=x^4-2x+1 \quad \textit{por el binomio} \quad x-\frac{1}{2}$$

Ejemplo 23

¿Cuál es el resto de la división del polinomio

$$A(x)=x^3+x-3 \quad \text{por el binomio} \quad x+3?$$

Resto: $A(-3)=(-3)^3+(-3)-3=-33$.

Ejercicio 24

Hállese el resto de la división del polinomio

$$A(x)=x^3-2x+1 \quad \textit{por el binomio} \quad x+2.$$

(Tras su resolución, consúltese el ejemplo 21.)

Como corolario * del teorema del resto se deduce inmediatamente el llamado

> TEOREMA DE RUFFINI. La condición necesaria y suficiente para que un polinomio $P(x)$ sea divisible por el binomio $x-a$ es que el valor numérico del polinomio sea 0, para $x=a$.
>
> Simbólicamente,

$$P(x)=\overset{\cdot}{x-a} \iff P(a)=0.$$

Obsérvese que, en realidad, se trata de dos teoremas: el directo y el recíproco. A fin de que quede claro, desdoblaremos los enunciados y realizaremos la justificación de cada uno de ellos en forma paralela.

TEOREMA DIRECTO. La condición necesaria para que $P(x)$ sea divisible por $x-a$ es que $P(a)=0$.

TEOREMA DIRECTO.

Hipótesis:

$$P(x)=\overset{\cdot}{x-a}.$$

Tesis:

$$P(a)=0.$$

$$P(x)=\overset{\cdot}{x-a} \implies P(x)=(x-a)B(x)$$
$$\Downarrow$$
$$P(a)=(a-a)B(a)$$
$$\Updownarrow$$
$$P(a)=0\cdot B(a)$$
$$\Updownarrow$$
$$P(a)=0.$$

TEOREMA RECÍPROCO. La condición suficiente para que $P(x)$ sea divisible por $x-a$ es que $P(a)=0$.

TEOREMA RECÍPROCO.

Hipótesis:

$$P(a)=0.$$

Tesis:

$$P(x)=\overset{\cdot}{x-a}$$

$$P(a)=0 \implies P(x)=(x-a)B(x)+0$$
$$\Downarrow$$
$$P(x)=(x-a)B(x)$$
$$\Downarrow$$
$$P(x)=\overset{\cdot}{x-a}$$

Ejemplo 24

Determínese si el polinomio $P(x)=x^3-2x-3$ es divisible o no por el binomio $x+1/3$.

$$P(-1/3)=(-1/3)^3-2(-1/3)-3=-64/27$$

$$P(-1/3)\neq 0 \implies P(x)\neq\overset{\cdot}{x+1/3}$$

* Corolario = proposición matemática que se desprende inmediatamente de un teorema demostrado.

Ejercicio 25

Hállese si el polinomio $A(x)=x^4-\frac{1}{3}x-\frac{11}{48}$ *es divisible por el binomio* $x+\frac{1}{2}$.

Ejemplo 25

Calcúlese cuánto ha de valer el coeficiente k en el polinomio

$$T(x)=x^4-kx+\frac{1}{3}$$

para que sea divisible por el binomio $x+2$.

$$T(-2)=(-2)^4-k(-2)+\frac{1}{3}=0$$

$$16+2k+\frac{1}{3}=0 \Longrightarrow k=-\frac{49}{6}$$

Ejercicio 26

Se sabe que el polinomio $S(x)=x^4-(k+1)x^2+kx-1$ *es divisible por el binomio* $x+\frac{1}{2}$.

¿Cuánto vale k?

A todo $a \in Q$, tal que $A(x)=\overline{x-a}$, se le denomina «cero o raíz del polinomio $A(x)$».

Ejemplo 26

Determínese si -1 es un «cero» del polinomio

$$A(x)=x^4+x^3-2x+1$$
$$A(-1)=(-1)^4+(-1)^3-2(-1)+1=3$$
$$A(-1)\neq 0.$$

El racional -1 no es un cero o raíz del polinomio $A(x)$.

Ejercicio 27

Dígase si el racional $\frac{1}{2}$ *es un cero o raíz del polinomio*

$$C(x)=x^3-2x+\frac{7}{8}.$$

Ejercicio 28

Se sabe que $\frac{3}{5}$ *es un cero del polinomio* $P(x)=x^3+kx-1$. *¿Cuál es el valor de k?*

2. DESCOMPOSICION FACTORIAL DE POLINOMIOS

Iniciaremos este número desarrollando el

Ejemplo 27

Determínese si 1 es un «cero» del polinomio

$$A(x)=2x^4+x^3-8x^2-x+6$$
$$A(1)=2\cdot 1^4+1^3-8\cdot 1^2-1+6=0.$$

Efectivamente lo es, lo que quiere decir que la división de $A(x)$ entre $x-1$ es exacta.

	2	1	−8	−1	6
1		2	3	−5	−6
	2	3	−5	−6	$0=R$

Cociente: $B(x)=2x^3+3x^2-5x-6$.

Por tanto, se puede escribir:

$$A(x)=(x-1)\,B(x)$$
$$2x^4+x^3-8x^2-x+6=(x-1)\,(2x^3+3x^2-5x-6). \qquad [1]$$

Tomemos ahora el polinomio $B(x)=2x^3+3x^2-5x-6$ e investiguemos si -1 es uno de sus ceros.

$$B(-1)=2(-1)^3+3(-1)^2-5(-1)-6=0.$$

Resulta que sí lo es, y, por tanto, la división de $B(x)$ entre $x+1$ es exacta.

	2	3	−5	−6
−1		−2	−1	6
	2	1	−6	$0=R$

Cociente: $C(x)=2x^2+x-6$.

Luego se puede escribir:

$$B(x)=(x+1)\,C(x)$$
$$2x^3+3x^2-5x-6=(x+1)\,(2x^2+x-6). \qquad [2]$$

Finalmente, tomemos el polinomio $C(x)=2x^2+x-6$, y veamos si -2 es una de sus raíces o ceros:

$$C(-2)=2(-2)^2+(-2)-6=0.$$

Lo es, y la división de $C(x)$ entre $x+2$ es exacta

	2	1	−6
−2		−4	6
	2	−3	0 = R

Cociente: $D(x)=2x-3$.
Es claro que se puede escribir

$$C(x)=(x+2)\,D(x)$$
$$2x^2+x-6=(x+2)\,(2x-3). \qquad [3]$$

Si se observan las igualdades [3], [2] y [1] se ve que, al sustituir sucesivamente, resulta que el polinomio $A(x)$ que nos dieron ha quedado descompuesto en factores.

$$2x^4+x^3-8x^2-x+6=(x-1)\,(x+1)\,(x+2)\,(2x-3).$$

O, si se prefiere, sacando factor común 2 del último paréntesis,

$$2x^4+x^3-8x^2-x+6=(x-1)\,(x+1)\,(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)2.$$

Ejercicio 29

Efectúese la multiplicación de polinomios

$$(x^2+1)\,(x-1)\,(2x-5).$$

Ejercicio 30

Hállense dos «ceros» del polinomio

$$A(x)=2x^4-7x^3+7x^2-7x+5$$

y exprésese $A(x)$ en producto de cuatro factores.

Cuando es imposible descomponer un polinomio en factores de menor grado, se dice que es **irreducible.**

Ejemplo 28

El polinomio x^2+1 es irreducible porque no existe ningún $a\in Q$ que sea «cero o raíz» suya *.

* Adviértase que un polinomio puede no tener «ceros» en $\mathcal{R}$ y ser reducible. Ejemplo: $x^4+x^2+1=(x^2-x+1)\,(x^2+x+1)$.

Se denominan «factores primos de un polinomio» a los factores irreducibles de su descomposición. Así, son factores primos del polinomio del ejemplo 27 las expresiones

$$(x-1),\ (x+1),\ (x+2),\ (2x-3).$$

Si se hizo bien el ejercicio 30, se habrán conseguido, como factores primos de $A(x)$, los irreducibles en $\mathcal{R}$

$$(x^2+1),\ (x-1)\ \text{y}\ (2x-5).$$

Cuando se ha conseguido descomponer un polinomio en factores primos, que todos son lineales o de primer grado, se dice que se ha realizado una *descomposición completa* en el cuerpo Q.

Una vez que se ha observado el comportamiento de los polinomios reducibles, al descomponer en sus factores, desarrollaremos la teoría de un modo formal.

TEOREMA

Si un polinomio de grado n tiene n ceros, se puede descomponer de forma única en producto de su coeficiente de mayor grado por n factores lineales del tipo $(x-r)$, en la que r representa cada una de las n raíces del polinomio.

En efecto: Sea el polinomio de grado n

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x^1+a_0{}^0$$

Por hipótesis, admite una raíz r_1, luego, según el teorema de Ruffini, se puede escribir:

$$p(x)=(x-r_1)\,q(x), \qquad [1]$$

en la que $q(x)$ es un polinomio de grado $n-1$, y conserva como primer coeficiente el a_n.

Siendo r_2 otra raíz de $p(x)$, habrá de serlo de $q(x)$, ya que $(x-r_1)$ es irreducible, de modo que

$$q(x)=(x-r_2)\,t(x), \qquad [2]$$

en la que $t(x)$ es de grado $n-2$ y, de igual modo, sigue conservando a_n como primer coeficiente.

Sustituyendo [2] en [1]:

$$p(x)=(x-r_1)\,(x-r_2)\,t(x).$$

De este modo, tras n veces se llegará a un cociente $z(x)$, de grado $n-n=0$, cuyo único coeficiente será el que se ha venido conservando a lo largo del proceso de descomposición, es decir, el a_n.

De manera que

$$\boxed{p(x)=(x-r_1)\,(x-r_2)\,(x-r_3)\ldots(x-r_n)\cdot a_n}$$

Como corolario de este teorema puede enunciarse:

> Un polinomio de grado n admite, como máximo, n ceros.

Ejemplo 29

Descompóngase en factores el polinomio

$$A(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x + 12.$$

a) ¿Cómo se empiezan a buscar los posibles ceros?

Si se tienen ceros o raíces enteros, han de ser divisores del término independiente. En este caso, las posibles raíces enteras son: ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 12.

b) Probemos, usando el teorema de Ruffini, si, en efecto, son o no ceros de $A(x)$.

$$A(+1) \neq 0; \qquad A(-1) \neq 0; \qquad A(2) = 0.$$

c) Dividamos

	2	−3	−8	12
2		4	2	−12
	2	1	−6	0

$B(x) = 2x^2 + x - 6$

d) Repitamos el proceso con $B(x)$.

Los que no eran ceros de $A(x)$, no lo son de $B(x)$; por tanto, no han de probarse. Pero el 2, que fue cero de $A(x)$, es posible que vuelva a serlo.

$$B(2) \neq 0; \qquad B(-2) = 0$$

	2	1	−6
−2		−4	6
	2	−3	0

$$C(x) = 2x - 3 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$A(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x + 12 = (x-2)(x+2)\left(x - \frac{3}{2}\right)2$$

Ejercicio 31

Descompóngase en factores el polinomio

$$A(x) = x^4 - 3x^2 - 4.$$

3. POLINOMIOS IGUALES. METODO DE IDENTIFICACION DE COEFICIENTES

En el apartado 6 del capítulo 2.1 quedó establecida la relación de igualdad en el conjunto de los polinomios:

> Dos polinomios son iguales si tienen iguales sus coeficientes del mismo grado.

Además, el llamado *principio de identidad* dicta que

> Dos polinomios iguales tienen el mismo valor numérico para todo $a \in Q$.

Como consecuencia inmediata de este principio se puede enunciar este teorema, de justificación elemental:

> TEOREMA. Si un polinomio de grado n tiene más de n ceros, es que se trata del polinomio nulo $0 = (0, 0, 0, \ldots)$.

La aplicabilidad de las tres proposiciones recuadradas es muy importante, y se pone de manifiesto en los ejemplos del método de identificación de coeficientes que se disponen a continuación.

Ejemplo 30

Determínense por identificación de coeficientes el cociente y el resto de la división

$$(x^4 - 2x^2 + 3) : (x^2 + x + 1).$$

El polinomio-cociente es de segundo grado, del tipo $ax^2 + bx + c$, y el polinomio-resto habrá de ser, como máximo, de un grado menor que el polinomio-divisor, de modo que será de primer grado, de la forma $dx + e$, debiendo cumplirse la siguiente igualdad euclídea:

$$x^4 - 2x^2 + 3 = (x^2 + x + 1) \cdot (ax^2 + bx + c) + (dx + e).$$

Operando el segundo miembro se llega a establecer

$$x^4 - 2x^2 + 3 = ax^4 + (b + a)x^3 + (c + ab + a)x^2 + (c + b + d)x + (c + e).$$

Como han de ser polinomios iguales, se identifican sus coeficientes de igual grado, resultando:

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{1=a}\\ 0=b+a\end{array}\right\}\ \boxed{b=-1}$$

$$-2=c+ab+a \implies \boxed{c=-2}$$

$$0=c+b+d \implies \boxed{d=3}$$

$$3=c+e \implies \boxed{e=5}$$

Así, pues, el cociente es el polinomio x^2-x-2, y el resto es el polinomio $3x+5$.

Ejercicio 32

Se sabe que el polinomio ax^3+bx+c *es divisible por* $x-2$; *que* $\frac{1}{3}$ *es uno de sus ceros y que su valor numérico para* -2 *es* 4.

Determínense sus coeficientes.

Ejemplo 31

Calcúlese la raíz cuadrada

$$\sqrt{4x^4-4x^3+5x^2-2x+1}.$$

El polinomio raíz, si existe, habrá de ser de segundo grado, del tipo ax^2+bx+c, de modo que su cuadrado es el polinomio-radicando dado.

$$4x^4-4x^3+5x^2-2x+1=(ax^2+bx+c)^2=a^2x^4+2abx^3+(2ac+b^2)x^2+2bcx+c^2.$$

Identificando coeficientes de igual grado,

$$\begin{array}{rl} 4=a^2 & \implies a=2\\ -4=2ab & \implies b=-1\\ 5=2ac+b^2 & \implies c=1\\ -2=2bc & \\ 1=c^2 & \end{array}$$

El polinomio raíz es $(2x^2-x+1)$.

Ejercicio 33

Determínense p *y* q *de modo que el polinomio* $9x^4-3x^3+31x^2+px+q$ *sea cuadrado perfecto.*

Ejercicio 34

Determínese m en el polinomio $3x^4-2x^3-5x^2+mx+4$ *para que sea divisible por* $x+2$.

Ejemplo 32

Descompóngase la fracción

$$\frac{5x+1}{x^3+2x^2-x-2}$$

en suma de tres fracciones de denominadores lineales.

(Aunque todavía no se ha formalizado el cuerpo de fracciones de $\mathcal{O}[x]$, se supone al alumno familiarizado con la automatización básica suficiente.)

a) Se descompone en factores el polinomio-divisor, resultando

$$x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x+1)(x+2)$$

b) Si existen esas tres fracciones pedidas, habrán de cumplir que

$$\frac{5x+1}{x^3+2x^2-x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}$$

c) Intentemos determinar esos parámetros A, B y C, del siguiente modo:

$$\frac{5x+1}{x^3+2x^2-x-2}=\frac{A(x+1)(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+2)}$$

Identificando los numeradores

$$5x+1=A(x+1)(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)(x+1).$$

Esos dos polinomios son iguales, luego han de tener los mismos valores numéricos para todo racional, por ejemplo:

$$\begin{aligned}&\text{Para } x=1 \implies 6=6A \implies A=1\\ &\text{Para } x=-1 \implies -4=-2B \implies B=2\\ &\text{Para } x=-2 \implies -9=3C \implies C=-3\end{aligned}$$

Así, pues, la solución es

$$\frac{5x+1}{x^3+2x^2-x-2}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}-\frac{3}{x+2}$$

En lugar de haber identificado valores numéricos se podía haber hecho identificando coeficientes; así,

$$5x+1=(A+B+C)x^2+(3A+B-C)x+(2A-2B-C)$$

$$\left.\begin{aligned}0&=A+B+C\\5&=3A+B\\1&=2A-2B-C\end{aligned}\right\} \implies \begin{aligned}A&=1\\B&=2\\C&=-3\end{aligned}$$

Ejercicio 35

Descompóngase en suma de fracciones simples

$$\frac{-7x-10}{x^3+x^2-4x-4}.$$

Ejercicio 36

Dado el polinomio

$$A(x)=4x^3-36x^2+33x+p,$$

a) *determinar p para que* $A(x)+81=\overline{x+1}$;

b) *sustituido p por su valor, determínense los tres ceros de* $A(x)$, *sabiendo que uno se repite.*

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 2.2

17. x^2-x+1.

18. Cociente: $x^2+5/2\,x+11/2$.
Resto: $23/2\,x-10$

19. $M)\,(-x-1)$.

20. $(x+1)$ y $(x-1)$.

21. *a)* Cociente: x^3+2x^2+4x+5.
Resto: 11.
b) Cociente: $x^2+1/2\,x+9/4$.
Resto: 41/8.

22.

	1	1	0	−2
−1/2		−1/2	−1/4	1/8
	1	1/2	−1/4	−15/8 = R

Cociente: $x^2+1/2\,x-1/4$.
Resto: $-15/8$.

23. $R=1/16$.

24. Consúltese el ejemplo 21.

25. Sí; lo es.

26. $k=-19/12$.

27. Sí; lo es.

28. $k=98/75$.

29. $2x^4-7x^3+7x^2-7x+5$.

30. 1, 5/2.

31. $A(x) = (x+2)\,(x-2)\,(x^2+1)$.

32. $a = 5/7$; $b = -27/7$; $c = 2$.

33. $p = -41/8$; $q = 1\,681/64$.

34. $m = 24$.

35. $\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{2}{x-2} + \dfrac{1}{x+1}$.

36. $p = -8$; $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$, $\beta = 8$.

2.3

Divisibilidad. Divisibilidad en Z y en P [x]

En este capítulo se va a intentar formalizar un poco más los conceptos estudiados en anteriores aprendizajes, referibles a la relación de divisibilidad en N. Para ello se realizará un desarrollo paralelo de la divisibilidad en el conjunto de los enteros Z, y en el conjunto de los polinomios sobre el cuerpo de los racionales Q.

1. CONCEPTO DE IDEAL

a) Entendemos por *subanillo* una parte de un anillo que sigue siendo anillo.

b) Imaginemos el conjunto A que resulta de multiplicar por 2 a los números enteros.

Se trata del bien conocido conjunto de los números pares

$$I = \{\ldots, -50, \ldots, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots, 100, \ldots\}.$$

c) $[Z, +, \cdot]$ es un anillo. El subconjunto $I \subset Z$, de los enteros pares, ¿sigue siendo anillo? Sí, porque:

— la adición de dos pares es par;
— la adición de números pares es

- — asociativa,
- — tiene elemento neutro $(2+0=2)$,
- — tiene elementos opuestos $(-8$ y $+8)$,
- — conmutativa;

} grupo aditivo abeliano

— la multiplicación de dos pares es par;
— la multiplicación de números pares es — asociativa;

} semigrupo multiplicativo

— la multiplicación de enteros pares es distributiva respecto de la adición.

Tras este análisis se puede asegurar que

> El conjunto de los enteros pares es un subanillo del anillo de los enteros
>
> $$[I, +, \times] \subset [Z, +, \times].$$

Pero, además, se cumple esta interesante propiedad:

> El producto de un número par por cualquier entero es un número par.
> Simbólicamente,
>
> $$a \in I, \quad \forall b \in Z, \quad (a \cdot b) \in I$$

De un subconjunto que, como el de los pares I,

— es subanillo de Z, y, además,
— cumple la propiedad recuadrada,

se dice que es un «ideal de Z».

Ejemplo 33

El conjunto de los enteros impares no es un ideal de $[Z, +, \times]$, porque ni siquiera llega a ser subanillo.

Al sumar dos números impares, el resultado es par; se «sale» del subconjunto de los impares.

Ejemplo 34

El conjunto de los múltiplos de 3, que representaremos $\{\dot{3}\}$, con la adición y la multiplicación forma un ideal del anillo $[Z, +, \times]$.

En efecto:

1) $3p + 3q = 3(p + q) = \dot{3}$.

Esta adición es:

— asociativa;
— tiene elemento neutro: $3 \cdot 0 = 0$;
— tiene elementos opuestos: $-3p + 3q = 0$;
— conmutativa:

grupo aditivo abeliano

2) $3p \cdot 3q = 3(3 \cdot pq) = \dot{3}$.

Esta multiplicación es asociativa:

semigrupo multiplicativo

3) $3k \cdot (3p + 3q) = 3k \cdot 3p + 3k \cdot 3q$.

La multiplicación es distributiva respecto de la adición. Luego $[\{\dot{3}\}, +, \times]$ es un subanillo de $[Z, +, \times]$; y, además,

4) $\forall a \in Z,\ 3p \cdot a \in \{\dot{3}\}$.

La terna $[\{\dot{3}\}, +, \times]$ es un ideal de $[Z, +, \times]$.

Ejercicio 37

Muéstrese que el conjunto de los múltiplos de 5, con la adición y multiplicación, es un ideal del anillo de los enteros.

El anillo de los polinomios sobre Q tiene todas las propiedades y admite todos los conceptos referibles a Z. Así pasa con el que nos ocupa: el concepto de ideal.

Ejemplo 35

Muéstrese que todos los polinomios divisibles por $(x - a)$ forman un ideal del anillo $[\mathcal{P}[x], +, \times]$.

En efecto:

1) Al sumar dos polinomios divisibles por $(x - a)$ se obtiene un polinomio divisible por $(x - a)$.

$$A(x) \cdot (x - a) + B(x) \cdot (x - a) = (x - a)\,[A(x) + B(x)] = \overline{\dot{x - a}}.$$

Esta adición tiene todas las propiedades del grupo aditivo abeliano de los polinomios.

2) Al multiplicar dos polinomios divisibles por $(x - a)$ se obtiene otro polinomio divisible por $(x - a)$.

$$A(x) \cdot (x - a) \cdot B(x) \cdot (x - a) = (x - a)\,[A(x) \cdot B(x) \cdot (x - a)] = \overline{\dot{x - a}}.$$

Esta multiplicación es, obviamente, asociativa.

3) Este conjunto de los polinomios divisibles por $(x-a)$ goza de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición.

Por todo lo cual resulta ser un subanillo del anillo de los polinomios.

Pero es que, además,

4) $\forall C(x) \in \mathcal{P}[x],\ C(x) \cdot [(x-a)\, A(x)] = \dot{\overline{x-a}}$.

El conjunto de los polinomios divisibles por $(x-a)$ forma un ideal del anillo $[\mathcal{P}[x],\ +,\ \times]$.

Ejercicio 38

Explíquese cómo el conjunto de los polinomios en Q, divisibles por x^2+1, *forman un ideal del anillo* $[\mathcal{P}[x],\ +,\ \times]$.

Todo lo que se ha venido desarrollando con ejemplos concretos es general, tanto para el anillo de los enteros como para el de los polinomios.

Así, escribiremos de un modo general:

> Siendo a un entero cualquiera, se denomina múltiplo de a a todo entero del tipo $k \cdot a$ $(k \in Z)$ y su conjunto, denotado $\{\dot{a}\}$ o simplemente (a), es ideal del anillo $[Z,\ +,\ \times]$.

Paralelamente:

> Siendo $A(x)$ un polinomio cualquiera, se denomina múltiplo de $A(x)$ a todo polinomio del tipo $B(x) \cdot A(x)$, $[B(x) \in \mathcal{P}[x]]$, y su conjunto, denotado $\{\dot{\overline{A(x)}}\}$, o simplemente $(A(x))$, es ideal del anillo $[\mathcal{P}[x],\ +,\ \times]$.

2. IDEALES PRINCIPALES. GENERADOR O BASE

Se denomina *ideal principal* aquel cuyos elementos se generan todos como producto de un elemento fijo, llamado *generador* o *base,* por elementos del anillo.

Ejemplo 36

En el anillo de los enteros, el ideal de los múltiplos de 5, $[(5),\ +,\ \times]$, es ideal principal de generador 5, pues todos sus elementos son del tipo $5 \cdot k$, en el que $k \in Z$.

De manera análoga sucede en el anillo $[\mathcal{P}[x],\ +,\ \times]$.

Trataremos de justificar ahora que, tanto en los enteros como en los polinomios, todos sus ideales son principales; o, lo que es lo mismo, que todo ideal está formado por los múltiplos de un entero (de un polinomio).

TEOREMA. Todo ideal de $[Z, +, \times]$ está formado por los múltiplos de un entero positivo.

a) Sea $[I, +, \times] \subset [Z, +, \times]$ un ideal de Z.

b) I contendrá elementos positivos, pues ha de contener elementos opuestos de los negativos.

Si tiene un $+a$, ya tiene «positivos»;
Si tiene un $-a$, ha de contener a su opuesto $+a$.

c) Admitamos que p es el menor de esos elementos positivos.

d) Hagamos la demostración por reducción al absurdo viendo cómo no es posible que haya un $x \in I$ que no sea múltiplo de p.

Imaginemos que hay un $q \in I$ que no es múltiplo de p.

Entonces, al dividir, resultaría:

$$q = p \cdot t + r \Longrightarrow r = q - pt$$
$$r = q + p(-t).$$

Como los sumandos q y $p(-t)$ son elementos del ideal, la suma r ha de ser del ideal; sin embargo, no es posible, puesto que r sería más pequeño que q, contra la hipótesis; luego la única posibilidad es que $r = 0$.

Consecuentemente:

$$q + p(-t) = 0 \Longrightarrow q = pt \Longrightarrow q = \dot{p}.$$

Si un generador a es múltiplo de otro generador b, resulta que todos los múltiplos de a lo son de b, lo cual implica la inclusión de sus ideales:

$$a = \dot{b} \Longrightarrow (a) \subset (b).$$

Ejemplo 37

El ideal $[(9), +, \times]$ está incluido en el ideal $[(3), +, \times]$, pues todo múltiplo de 9 lo es de 3.

Ejemplo 38

Todo polinomio múltiplo de $x^2 - 1$ lo es de $x + 1$, ya que $x^2 - 1 = \dot{\overline{x+1}}$.

3. ADICION DE IDEALES. MAXIMO COMUN DIVISOR. NUMEROS PRIMOS ENTRE SI

Es muy fácil justificar que, si se suman los elementos de dos ideales I_1 e I_2, se obtienen elementos de otro ideal que se denomina «suma de $I_1 + I_2$».

Sean los ideales de los múltiplos de a y de b.

$$(a)=\{p\cdot a\}$$
$$(b)=\{q\cdot b\}$$

Según lo dicho, su adición

$$(a)+(b)=\{pa+qb\}=\{K\cdot D\}=(D)$$

producirá otro ideal, cuyo generador lo denotamos D.

Justifiquemos que ese D es

— divisor común de a y b,
— que es el mayor posible.

1) En el conjunto-suma $\{pa+qb\}$

— si $q=0$, entonces se convierte en $\{pa\}$, que es (a);
— si $p=0$ se transforma en $\{qb\}$, que es (b).

Luego D es divisor común de a y b.

2) Si d es un divisor común de a y b, divide a la suma $p\cdot a+q\cdot b$, cualesquiera que sean p y q. Como $D\in(D)$, existirán unos p y q particulares para los que

$$\boxed{a\cdot p+b\cdot q=D}$$

Luego d siempre dividirá a D. Se concluye, entonces, que D es el divisor mayor posible, común a a y a b. Se trata del máximo común divisor de (a, b).

Tras todo lo expuesto, se puede definir:

> Máximo común divisor de dos enteros a y b es el generador del ideal-suma de los ideales generados por dichos números.

Ejemplo 39

Determínense los números p y q que cumplen la igualdad

$$6p+15q=3$$

$$\begin{array}{r|l} 15 & 6 \\ 3 & 2 \end{array} \iff 15=6\cdot 2+3$$

$$\Downarrow$$

$$3=15-6\cdot 2$$

$$\Downarrow$$

$$3=15\cdot 1+6\cdot(-2)$$

$$6\cdot(-2)+15\cdot(1)=3.$$

De manera del todo análoga a como se ha expuesto hasta aquí, se desarrollaría la cuestión sobre el anillo de los polinomios. Simplemente, resultaría de escritura más engorrosa.

Cálculo del máximo común divisor de (a, b)

Establezcamos la división entre $(a > b)$

$$\begin{array}{l|l} a & b \\ \hline r_1 & q_1 \end{array} \iff a = b \cdot q_1 + r_1. \qquad [1]$$

Según [1], todo divisor común de b y de r_1 lo es de a.

Además, despejando,

$$r_1 = a + b(-q_1) \qquad [2]$$

lo que permite asegurar que todo divisor común de a y b lo es de r_1.

Ello significa que la suma de ideales $(a)+(b)$ da el mismo resultado que la de $(b)+(r_1)$. En otras palabras, se trata del mismo ideal.

$$(a)+(b)=(b)+(r_1) \qquad 0<r_1<|b| \qquad [3]$$

Ahora dividamos b por r_1

$$\begin{array}{l|l} b & r_1 \\ \hline r_2 & q_2 \end{array} \iff b = r_1 \cdot q_2 + r_2. \qquad [4]$$

Según [4], todo divisor común de r_1 y de r_2 lo es de b.

Además, despejando,

$$r_2 = b + r_1(-q_2) \qquad [5]$$

lo que permite asegurar que todo divisor de b y r_1 lo es de r_2.

Esto es tanto como decir que la suma de ideales $(b)+(r_1)$ produce el mismo ideal que la suma $(r_1)+(r_2)$.

$$(b)+(r_1)=(r_1)+(r_2) \qquad [6]$$

Dividiendo sucesivamente se llegaría a obtener restos decrecientes hasta llegar a esta división

$$\begin{array}{l|l} r_{n-1} & r_n \\ \hline 0 & q_{n+1} \end{array} \iff r_{n-1} = r_n \cdot q_{n+1} + 0,$$

de lo cual se deduce esta igualdad de ideales-suma

$$(r_{n-1})+(r_n)=(r_n) \qquad [7]$$

Por transitividad, en las igualdades [3], [5], ..., [7], se escribe:

$$(a)+(b)=(b)+(r_1)=\ldots=(r_{n-1})+(r_n)=(r_n) \qquad [8]$$

La [8] indica que el máximo común divisor de (a, b) es r_n por ser el menor elemento del ideal-suma $(a)+(b)$.

$$D(a, b)=r_n$$

La disposición práctica de realizar el cálculo se desarrolla, para enteros y para polinomios, en los dos siguientes ejemplos:

Ejemplo 40

Determínese el $D(224, 128)$

cocientes →	1	1	3	
224	128	96	32	← $D(224, 128)=32$
resto → 96	32	00		

Ejercicio 39

Determínese el $D(672, 384)$.

Ejemplo 41

Hállese el máximo común divisor de $(x^5+3x^3-x^2-3)$, $(3x^4+2x^3-3x-2)$.

Si en las divisiones sucesivas se producen restos de coeficientes racionales, molestos para operar, pueden multiplicarse por el número conveniente para conseguir manejar enteros, ya que, de ese modo, el resto sólo vendrá afectado por un factor constante.

	$x-2/3$	$3x+2$
$3x^5+9x^3-3x^2-9$	$3x^4+2x^3-3x-2$	x^3-1
$-3x^5-2x^4+3x^2+2x$	$-3x^4+3x$	
$-2x^4+9x^3+2x-9$	$+2x^3-2$	
$2x^4+4/3x^3-2x-4/3$	$-2x^3+2$	
$+31/3x^3-31/3$	0	

El máximo común divisor es $k\cdot(x^3-1)$.

Ejercicio 40

Determínese el máximo común divisor de

$$A(x)=x^4-x^2-2 \quad y \quad B(x)=x^3-3x^2+x-3.$$

Números primos entre sí. Teorema de Euclides

Si el máximo común divisor de dos números a y b es 1, se dice que son números primos entre sí.

$$D(a, b) = 1 \iff a \text{ y } b, \text{ primos entre sí.}$$

Ello supone que no tienen ningún divisor común, excepto la unidad.

De igual modo, dos polinomios $A(x)$ y $B(x)$, cuyo máximo común divisor es de grado cero, es decir, una constante, se dice que son primos entre sí:

$$D[A(x), B(x)] = k \iff A(x) \text{ y } B(x), \text{ primos entre sí.}$$

Teorema de Euclides

Si un número c divide al producto de dos factores $a \cdot b$, y es primo con a, es divisor de b.

En efecto, si a y c son primos, existirán dos números p y q, que cumplirán,

$$a \cdot p + c \cdot q = 1.$$

Multiplicando por b,

$$apb + cqb = b.$$

Resultando que:

c divide a apb por hipótesis,
c divide a cbq, obviamente;

luego ha de dividir a b.

Ejercicio 41

Dados los polinomios

$$A(x) = x^4 - 2x^3 - 14x^2 - 2x - 15$$
$$B(x) = x^3 - 2x^2 - 15x,$$

a) *determínese su máximo común divisor* $D(x)$;

b) *determínense los ceros del polinomio* $D(x)$;

c) *resuélvase la ecuación* $A(x) = 0$.

Ejercicio 42

Dados los polinomios

$$P(x) = x^4 + x^3 - x - 1$$
$$Q(x) = 2x^4 + 4x^3 - 2x - 4,$$

determínense dos polinomios, $A(x)$ y $B(x)$, del menor grado posible que satisfagan la identidad

$$P(x) \cdot A(x) = Q(x) \cdot B(x).$$

4. INTERSECCION DE IDEALES. MINIMO COMUN MULTIPLO. NUMEROS PRIMOS

Definimos la intersección de ideales como se hace en conjuntos: Un nuevo conjunto formado por los elementos comunes de los intersecados.

Se demuestra fácilmente que la intersección de ideales produce otro ideal. Así, el ideal de los múltiplos de a, intersecado con el ideal de los múltiplos de b, produce otro ideal, que denotamos (M).

$$(a) \cap (b) = (M)$$

Ese M es el generador del ideal resultante, que será:

— un múltiplo común de a y b; y, además,
— el menor de todos, por ser su generador.

> Mínimo común múltiplo de dos números a y b es el generador del ideal-intersección de los ideales generados por los números dados.

Ejemplo 42

Sean los ideales

$$(6) = \{\ldots, -6, 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, \ldots\}$$
$$(10) = \{\ldots, -10, 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, \ldots\}.$$

Su intersección es

$$(6) \cap (10) = \{\ldots, -30, 0, 30, 60, \ldots\}.$$

El mínimo común múltiplo de 6 y 10 es el menor múltiplo positivo de la intersección, generador del ideal

$$M(6, 10) = 30.$$

Ejercicio 43

Determínese el mínimo común múltiplo de 6 *y* 8.

a) Un número a es primo si no tiene más divisores que $\pm a$ y ± 1.

b) Un polinomio $A(x)$ se dice que es irreducible si no es divisible más que por sí mismo y, por tanto, no se puede descomponer en factores.

c) Un número no primo se denomina compuesto.

d) Un polinomio no irreducible es un polinomio reducible.

Al igual que se hizo en el número 2 del capítulo 2.2 para la descomposición factorial de polinomios, se demuestra fácilmente que todo número compuesto puede descomponerse en factores primos de manera única, salvo ± 1.

5. DETERMINACION DEL *D* Y DEL *M* DE DOS NUMEROS O DOS POLINOMIOS

Otro procedimiento para calcular el D de dos números (o dos polinomios), además del algoritmo de Euclides de las divisiones sucesivas, es la descomposición factorial en factores primos (en factores irreducibles), tal como se ha hecho en anteriores aprendizajes:

> El D de a y b está formado por los factores primos comunes afectados de su menor exponente.

De igual modo,

> El M de a y b está formado por los factores primos comunes y no comunes afectados de su mayor exponente.

Ejemplo 49

Determínense el D y el M de 72 y 56:

$$72 = 2^3 \times 3^2 \times 1$$
$$56 = 2^3 \times 7 \times 1$$
$$D(72 \text{ y } 56) = 2^3 = 8$$
$$M(72 \text{ y } 56) = 2^3 \times 3^2 \times 7 \times 1 = 504$$

Ejercicio 44

Determínense el D y el M de 432 *y* 288.

Entre el D y el M de dos números o dos polinomios existe una muy importante relación que demostramos a continuación.

Supónganse dos números descompuestos en factores primos:

$$A = a^{\alpha} \cdot b^{\beta} \cdot c^{\gamma} \ldots l^{\lambda}$$
$$B = a^{\alpha'} \cdot b^{\beta'} \cdot c^{\gamma'} \ldots l^{\lambda'}$$

en los que, claro está, alguno o algunos de los exponentes pueden ser nulos. Si se multiplican, se obtiene:

$$A \times B = a^{\alpha} \cdot b^{\beta} \cdot c^{\gamma} \cdot \ldots \cdot l^{\lambda} \cdot a^{\alpha'} \cdot b^{\beta'} \cdot c^{\gamma'} \cdot \ldots \cdot l^{\lambda'}.$$

De cada par de exponentes del mismo factor, se determina el menor, resultando, por ejemplo:

$$\alpha \leqslant \alpha'$$
$$\beta \leqslant \beta'$$
$$\gamma \leqslant \gamma'$$
$$\ldots\ldots$$
$$\lambda \leqslant \lambda'$$

Y ahora, se ordena el producto $A \times B$, poniendo delante todos los factores de exponentes menores:

$$A \times B = (a^{\alpha} \cdot b^{\beta} \cdot c^{\gamma'} \cdot \ldots \cdot l^{\lambda'}) \cdot (a^{\alpha'} \cdot b^{\beta'} \cdot c^{\gamma} \cdot \ldots \cdot l^{\lambda}).$$

Obsérvese que el primer paréntesis no es más que el máximo común divisor, y que el segundo es el mínimo común múltiplo, de modo que

$$A \times B = D \times M$$

La relación establecida permite determinar el M, si se ha calculado el D.

6. APLICABILIDAD

En este número, desarrollado en ejemplos y ejercicios, se trata de que el lector consiga una razonable destreza en la resolución de problemas de divisibilidad, tanto en Z como en $\mathcal{O}[x]$.

Ejemplo 4

Descompuesto un número en factores primos, se demuestra que el número de divisores, primos y compuestos que contiene es

$$A = a^{\alpha} \cdot b^{\beta} \cdot c^{\gamma} \cdot \ldots \cdot l^{\lambda}$$
$$\text{número de divisores de } A = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) \ldots (\lambda + 1).$$

También es fácil demostrar que la suma de todos los divisores es

$$\Sigma d = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} \cdot \frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{l^{\lambda+1} - 1}{l - 1}$$

Con estos dos datos, determínese cuánto son y cuánto suman los divisores de 144:

$$144 = 2^4 \times 3^2 \times 1$$
$$\text{número } (d) = (4 \times 1)(2 + 1) = 15 \text{ divisores}$$
$$\Sigma d = \frac{2^5 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3 - 1} = 403.$$

Ejercicio 45

Determínense el número y la suma de todos los divisores de 72.

Ejemplo 45

Calcúlense el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de 375 y 875:

	2	3
875	375	125
125	000	

$D = 125$

$$A \times B = M \times D$$

$$375 \times 875 = M \times 125 \Longrightarrow M = 2\,625$$

Ejercicio 46

Determínense dos números cuyo producto es 864 *y cuyo máximo común divisor es* 12.

Ejemplo 46

Calcúlense dos números cuyo producto es 3 456 y su máximo común divisor es 24.

Siendo los números a y b, y D y M el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo, respectivamente, se cumple

$$a \cdot b = D \cdot M.$$

Al dividir a entre D se obtendrá un cociente a', y al dividir b entre D resultará un cociente b', de modo que

$$a = a' \cdot D$$
$$b = b' \cdot D$$

Pero obsérvese —esto es lo importante— que a' y b' han de ser primos entre sí, ya que al dividir por D se los ha privado de todos sus factores comunes.

Sustituyendo arriba, queda:

$$a' \cdot D \cdot b' \cdot D = D \cdot M$$

$$a' \cdot b' \cdot 24^2 = 3\,456 \Longrightarrow a' \cdot b' = \frac{3\,456}{24^2} = 6.$$

Veamos qué par de números primos entre sí pueden dar de producto 6.

$$\left.\begin{matrix} a'=1 \\ b'=6 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{matrix} a=1\cdot 24=\ 24 \\ b=6\cdot 24=144 \end{matrix}\right\} \quad \boxed{24 \text{ y } 144}$$

$$\left.\begin{matrix} a'=2 \\ b'=3 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{matrix} a=2\cdot 24=\ 48 \\ b=3\cdot 24=\ 72 \end{matrix}\right\} \quad \boxed{48 \text{ y } 72}$$

Ejercicio 47

Hállense dos números cuyo cociente es $\frac{13}{17}$ *y su* $D=40$.

Ejemplo 47

Determínense dos números cuyo $D=15$ y cuyo $M=360$.

$$a\cdot b=M\cdot D \Longrightarrow a'\cdot b'\cdot D^2=M\cdot D \Longrightarrow a'\cdot b'=\frac{M}{D}$$

$$a'\cdot b'=\frac{360}{15}=24$$

Los únicos modos de descomponer 24 en dos factores primos entre sí son:

$$\left.\begin{matrix} a'=\ 1 \\ b'=24 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{matrix} 1\times 15=\ 15 \\ 24\times 15=360 \end{matrix}\right\} \quad \boxed{15 \text{ y } 360}$$

$$\left.\begin{matrix} a'=\ 3 \\ b'=\ 8 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{matrix} 3\times 15=\ 45 \\ 8\times 15=120 \end{matrix}\right\} \quad \boxed{45 \text{ y } 120}$$

Ejercicio 48

Sabiendo que $M(a,b)=1\,188$ *y que* $D(a,b)=9$, *determínense todos los posibles valores de a y b.*

Ejemplo 48

Se sabe que el $D(x)$ de los polinomios

$$A(x)=3x^4+9x^3+10x^2-6x+k$$
$$B(x)=3x^3+8x^2+9x-4$$

es de segundo grado.

Determínese k, así como las raíces reales de $A(x)$ y $B(x)$.

	$x+1/3$	$-3x+1$
$3x^4+9x^3+\ 10x^2-6x+k$	$3x^3+8x^2+9x-4$	$-x^2-3x+1/5(4+3k)$
$-3x^4-8x^3-\ \ 9x^2+4x$	$-3x^3-9x^2+3/5(4+3k)x$	
$+\ x^3+\ \ x^2-2x+k$	$-x^2+3/5(19+3k)x-4$	
$-\ x^3-8/3x^2-3x+4/3$	$+x^2\ \ +\ 3x\ \ -1/5(4+3k)$	
$-5/3x^2-5x+4/3+k$	$3/5(24+3k)x-1/5(24+3k)$	
$-\ \ x^2-3x+4/5+3/5k$		

$$\frac{3}{5}(24+3k)x-\frac{1}{5}(24+3k)=0 \Longrightarrow 24+3k=0 \Longrightarrow \boxed{k=-8}$$

$$D(x)=x^2+3x+4$$

$$\begin{array}{r|l} 3x^3+8x^2+9x-4 & x^2+3x+4 \\ \hline -3x^3-9x^2-12x & 3x-1 \\ \hline -x^2-3x-4 & \\ +x^2+3x+4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$B(x)=(x^2+3x+4)(3x-1) \qquad B\left(\frac{1}{3}\right)=0$$

La raíz real de $B(x)=1/3$

$$\begin{array}{r|l} 3x^4+9x^3+10x^2-6x-8 & x^2+3x+4 \\ \hline -3x^4-9x^3-12x^2 & 3x^2-2 \\ \hline -2x^2-6x-8 & \\ +2x^2+6x+8 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$A(x)=(x^2+3x+4)(3x^2-2)$$

$$3x^2-2=0 \begin{cases} x_1=\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3} \\ x_2=-\sqrt{\dfrac{2}{3}}=-\dfrac{\sqrt{6}}{3} \end{cases}$$

$$A\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=0; \qquad B\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=0$$

Las raíces reales de $A(x)$ son $\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

Ejercicio 49

Los polinomios

$$A(x)=2x^4-5x^3+5x^2-5x+k$$
$$B(x)=x^3-3x^2+x-3$$

tienen el máximo común divisor de segundo grado.

Determínense k y las raíces reales de los dos polinomios.

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 2.3

37. Consúltese el ejemplo 34.

38. Véase el ejemplo 35.

39. $D = 96$.

40. $k(x^2 + 1)$.

41. *a)* $D(x) = x^2 - 2x - 15$;
b) $x_1 = -3$; $x_2 = +5$;
c) las únicas raíces reales de $A(x)$ son las de $D(x)$.

42. $A(x) = 2x + 4$;
$B(x) = x + 1$.

43. $M(6, 8) = 24$.

44. $D = 144$; $M = 864$.

45. $n(d) = 12$;
$\Sigma d = 195$.

46. (12 y 72) ó (24 y 36).

47. (520 y 680).

48. 9 y 1 188; 36 y 297; 108 y 99.

49. $D(x) = x^2 + 1$; $B(3) = 0$; $A(1) = 0$; $A(3/2) = 0$.

2.4

El cuerpo de fracciones de P [x]

1. NECESIDAD DE AMPLIAR $\mathcal{O}[x]$

Cuando en el anillo Z se pretendía resolver la ecuación

$$2x = 3 \qquad [1]$$

no era posible, puesto que no hay un $x \in Z$ tal que su producto por 2 sea 3. Es decir, la ecuación en Z

$$a \cdot x = b \qquad [2]$$

solamente tiene solución si

$$b = \dot{a}.$$

Para poder resolver cualquier tipo de estas ecuaciones se ampliaba el conjunto Z y, por simetrización de su semigrupo multiplicativo abeliano y cancelativo *, se creaba el conjunto de los racionales Q.

En ese conjunto ya sí es posible resolver la ecuación [2], cualesquiera que sean a y b.

$$a \cdot x = b \implies x = \frac{b}{a} \in Q$$

La situación en el anillo de los polinomios es idéntica.

La ecuación

$$(3x + 1) \cdot (A(x)) = x^2 + 1 \qquad [3]$$

---

* Cancelativo: admite la ley de simplificación por no tener divisores del cero; es decir,

$$a \cdot x = a \cdot y \implies x = y.$$

no tiene solución. No existe un polinomio

$$A(x)=\frac{x^2+1}{3x+1},$$

pues x^2+1 no es divisible por $3x+1$.

2. SIMETRIZACION DEL ANILLO $[\mathcal{P}[x], +, \times]$

Para obviar esta dificultad se simetriza el semigrupo multiplicativo abeliano cancelativo * $[\mathcal{P}[x], \times]$ y se crea el cuerpo de las fracciones algebraicas, en el que ya sí es posible resolver la ecuación [3].

La simetrización consta de los siguientes pasos:

1.º Se establece el cartesiano $\mathcal{P}[x]\times\mathcal{P}[x]$.

2.º Se crea una relación de equivalencia R **sobre** $\mathcal{P}[x]\times\mathcal{P}[x]$.

Establecimiento de la relación R

El par $(A(x), B(x))$ es equivalente al par $(C(x), D(x))$ si, y solamente si,

$$A(x)\cdot D(x)=B(x)\cdot C(x).$$

Si, en lugar de como pares, lo expresamos como se hace tradicionalmente, en forma de fracciones, llamando «numerador» al primer polinomio y «denominador» al segundo, la relación establecida toma la forma

$$\frac{A(x)}{B(x)}=\frac{C(x)}{D(x)} \iff A(x)\cdot D(x)=B(x)\cdot C(x).$$

Análisis de la relación R

Es muy sencillo justificar que la relación establecida es

a) reflexiva,

b) simétrica,

c) transitiva.

y, por tanto, se trata —en efecto— de una relación de equivalencia.

3.º Acción de R **sobre el cartesiano** $\mathcal{P}[x]\times\mathcal{P}[x]$.

La relación R clasifica y parte al conjunto cartesiano $\mathcal{P}[x]\times\mathcal{P}[x]$ en clases de equivalencia, cada una de las cuales se denomina *fracción algebraica.*

El conjunto cociente es el conjunto de las fracciones algebraicas

$$\mathcal{F}[x]=\mathcal{P}[x]\times\mathcal{P}[x]\,/R.$$

---

* Véase nota anterior.

Ejercicio 50

Determínese si los pares de polinomios

$$\frac{x+1}{x^2+x+1} \quad \text{y} \quad \frac{x^2-1}{x^3-1}$$

pertenecen a la misma fracción algebraica.

4.° Estructuración de $\mathcal{F}[x]$, definiendo la adición y multiplicación en su seno

Pero antes de hacerlo, como consecuencia inmediata de la relación de equivalencia, establezcamos la siguiente proposición, muy útil en el cálculo que pretendemos:

> PROPOSICIÓN. Si se multiplican o dividen por el mismo polinomio el numerador y el denominador de una fracción algebraica, la fracción resultante es equivalente a la primera.

Gracias a esta proposición-teorema es posible

- — Simplificar fracciones algebraicas, dividiendo numerador y denominador por el mismo polinomio.
- — Reducir fracciones a otras equivalentes de denominador común.

Ejemplo 42

a) Simplifíquese la fracción $\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

$$\frac{x^3-1}{x^2-1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x^2+x+1}{(x+1)}$$

b) Redúzcase a denominador común

$$\frac{1}{x^2-3x+2}, \quad \frac{2x+1}{x^2-1}, \quad \frac{3}{x^3-x}$$

Se descomponen en factores irreducibles los denominadores

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$
$$x^2-1=(x-1)(x+1)$$
$$x^3-x=x(x-1)(x+1)$$

Y se calcula el mínimo común múltiplo de ellos:

$$M(x)=x(x-1)(x+1)(x-2).$$

De modo que las tres fracciones dadas tienen por equivalentes de igual denominador

$$\frac{x(x+1)}{x(x-1)(x+1)(x-2)}, \quad \frac{x(2x+1)(x-2)}{x(x-1)(x+1)(x-2)}, \quad \frac{3(x-2)}{x(x-1)(x+1)(x-2)}.$$

Ejercicio 51

Simplifíquese la fracción

$$\frac{x^4-5x^2+4}{x^4-5x^3+5x^2+5x-6}$$

Ejercicio 52

Redúzcase a común denominador:

$$\frac{x+5}{x^4-5x^2+4}, \quad \frac{2}{x^4-5x^3+5x^2+5x-6}, \quad \frac{x^2+1}{x^3-3x^2-x+3}$$

Ahora, como quedó dicho en **4.º**, procedemos a estructurar el conjunto de las fracciones algebraicas $\mathcal{F}[x]$.

3. ADICION EN $\mathcal{F}[x]$

Es fácil probar que la adición de polinomios es estable frente a la relación de equivalencia que definió $\mathcal{F}[x]$, lo que quiere decir que el resultado de la operación no depende de las fracciones escogidas de cada clase para operar. Ello nos permite definir la adición entre clases, tomando fracciones de igual denominador.

$$\mathcal{F}[x] \times \mathcal{F}[x] \xrightarrow{+} \mathcal{F}[x]$$

$$\left(\frac{A(x)}{C(x)}, \frac{B(x)}{C(x)}\right) \longrightarrow \frac{A(x)+B(x)}{C(x)}$$

La fracción algebraica-suma de otras dos de igual denominador es igual a la fracción cuyo numerador es la suma de numeradores y cuyo denominador es el de aquéllas.

Es elemental constatar que la suma de fracciones algebraicas

a) es asociativa;

b) tiene elemento 0;

c) todos sus elementos tienen su opuesto;

d) es conmutativa.

Por todo ello, decimos que $[\mathcal{F}[x], +]$ es un *grupo abeliano.*

4. MULTIPLICACION EN $\mathcal{F}[x]$

Definimos esta operación como la siguiente aplicación:

$$\mathcal{F}[x] \times \mathcal{F}[x] \longrightarrow \mathcal{F}[x]$$

$$\left(\frac{A(x)}{B(x)}, \frac{C(x)}{D(x)}\right) \longrightarrow \frac{A(x) \cdot C(x)}{B(x) \cdot D(x)}$$

La fracción algebraica-producto de otras dos es la fracción que tiene por numerador el producto de numeradores, y por denominador, asimismo, el producto de los denominadores.

Es fácil justificar que la multiplicación de fracciones algebraicas

a) es asociativa;

b) tiene elemento unidad;

c) todos sus elementos, excepto $\frac{0}{A(x)}$, tienen inverso;

d) es conmutativa.

Según lo establecido, $\left[\mathcal{F}[x] - \left\{\frac{0}{A(x)}\right\}, \times\right]$ es un *grupo abeliano.*

5. DISTRIBUTIVIDAD DE LA MULTIPLICACION RESPECTO DE LA ADICION EN $\mathcal{F}[x]$

$$\frac{A(x)}{P(x)} \cdot \left[\frac{B(x)}{Q(x)} + \frac{C(x)}{R(x)}\right] = \frac{A(x)}{P(x)} \cdot \frac{B(x)}{Q(x)} + \frac{A(x)}{P(x)} \cdot \frac{C(x)}{R(x)}$$

6. EL CUERPO DE FRACCIONES DE $\mathcal{O}[x]$

$[\mathcal{F}[x], +]$ grupo aditivo abeliano

$\left[\mathcal{F}[x] - \left\{\frac{0}{A(x)}\right\}, \times\right]$ grupo mutiplicativo

Distributividad de $\cdot$ respecto de $+$

$[\mathcal{F}[x], +, \cdot]$ es un cuerpo

Adviértase que, por ser conmutativo el grupo multiplicativo, el cuerpo es **abeliano.**

Ejercicio 53

Un polinomio $A(x)$ *es divisible por* x^2-1 *y produce los mismos restos al dividirlo por* $x-3$ *y* $x-4$.

Establézcase el polinomio $A(x)$*, así como sus tres únicas raíces.*

Ejemplo 50

Un polinomio de tercer grado es divisible por x^2-4, y sus restos, al dividirlo por $x-3$ y $x-1$, coinciden. Determínese una solución.

Sea el polinomio buscado el

$$A(x)=x^3+bx^2+cx+d.$$

Si $A(x)=\overset{\cdot}{\overline{x^2-4}}$ $\begin{cases} A(x)=\overset{\cdot}{\overline{x+2}} \Longrightarrow A(-2)=0 \\ A(x)=\overset{\cdot}{\overline{x-2}} \Longrightarrow A(2)=0 \end{cases}$

Además, $A(1)=A(3)$, luego

$$\begin{aligned} A(-2)=0 &: -8+4b-2c+d=0 \\ A(2)=0 &: \ 8+4b+2c+d=0 \\ A(1)=A(3) &: \ 1+b+c+d=27+9b+3c+d \end{aligned}$$

$$\boxed{c=-4} \qquad \boxed{b=-9/4} \qquad \boxed{d=9}$$

$$\boxed{A(x)=4x^3-9x^2-16x+36}$$

Ejercicio 54

Justifíquese que el $D(x)$ *de*

$$A(x)=x^4-14x^3+48x^2+14x-49$$
$$B(x)=x^3-15x^2+63x-49$$

es $B(x)$.

Ejercicio 55

Calcúlese el valor de k *para que el polinomio*

$$A(x)=x^4-2x^3-(k+1)x^2+2x+k$$

sea divisible por el

$$B(x)=x^2-2x-k.$$

Luego, resuélvase la ecuación

$$A(x)=0.$$

Ejercicio 56

Descompóngase la fracción

$$\frac{2x^2+x-7}{x^3-2x^2-x+2}$$

en suma de tres fracciones de denominadores lineales.

Ejercicio 57

El polinomio $A(x)$, al dividirlo por $(x-2)$, da de resto 6; $A(-1)=-3$ y el resto al dividirlo por $(x-1)$ es -5.

Determinar el resto de la división de $A(x)$ entre el producto

$$(x-2)\,(x+1)\,(x-1).$$

Ejercicio 58

Determínense dos números a y b, sabiendo que $D(a,b)+M(a,b)=76$.

Ejercicio 59

Determínense todos los posibles pares de divisores y cocientes de esta división:

$$\begin{array}{r|l} 2\,103 & d \\ \cline{2-2} 81 & c \end{array}$$

Ejercicio 60

Realícese la división $(x^p-a^p):(x^q-a^q)$ y determínese la condición para que sea exacta.

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 2.4

50. Sí. Representan a la misma fracción algebraica.

51. $\dfrac{x+2}{x-3}$.

52. $\dfrac{(x+5)\,(x-3)}{(x^2-1)\,(x^2-4)\,(x-3)}$, $\dfrac{2(x+2)}{(x^2-1)\,(x^2-4)\,(x-3)}$ $\dfrac{(x^2+1)\,(x^2-4)}{(x^2-1)\,(x^2-4)\,(x-3)}$.

53. $A(x)=7x^3-36x^2-7x+36$; $x_1=1$; $x_2=-1$; $x_3=\dfrac{36}{7}$.

54. Basta ver que la división $A(x):B(x)$ es exacta.

55. $k=5/4$; $x_1=1$; $x_2=-1$; $x_3=5/2$; $x_4=-1/2$.

56. $\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-2}$.

57. $R(x)=4x^2-x-8$.

58. (1 y 75); (3 y 25); (2 y 74); (4 y 72); (8 y 36); (19 y 57).

59. 674 y 3; 337 y 6; 1 011 y 2.

60. Cociente: $x^{p-q}+a^q x^{p-2q}+\ldots$

Condición: $a^q x^{p-2q}=a^p \Longrightarrow p-kq=0 \Longrightarrow p=kq \Longrightarrow p=\dot{q}$.

2.5

Ejercicios y problemas de recapitulación

1. Determínense el *D* y el *M*, por divisiones sucesivas, de 2 401 y 1 379.

2. Con alambres de 12 y 8 cm se desea hacer la mayor cantidad de trozos iguales, que midan un número exacto en centímetros. ¿Cuántos trozos resultan?; ¿cuánto mide cada trozo?

3. Determínese el mayor natural posible que, al dividir a 9 040 y a 4 353, deja el mismo resto, 10.

4. Calcúlese el mayor natural posible que, al dividir a 2 001, da de resto 12, y al hacerlo a 2 709, queda 18 de resto.

5. La suma de los cuadrados de dos números es 208, y su mínimo común múltiplo es 24. Hállense.

6. Determínense los términos de una fracción sabiendo que tienen por mínimo común múltiplo 12; y que al sumar al numerador 12, y al denominador, 16, se obtiene otra fracción de la misma clase racional.

7. Hállense dos números cuyo máximo común divisor es 6, y cuyo mínimo común múltiplo es 72.

8. Dos números se diferencian en 60 unidades, y su mínimo común múltiplo es 720. Determínense.

9. La suma de dos números es 420. Al dividir su mínimo común múltiplo entre su máximo común divisor da 4. Calcúlense.

10. Un número, al dividirlo sucesivamente por 15, 20, 36 y 48, arroja el mismo resto, 11. Fíjese, sabiendo que es el menor posible.

11. Determínense el menor y el mayor números posibles, comprendidos entre 1 000 y 5 000, que dejen de resto 13 al dividirlos por 16 y 42

12. Calcúlese el cubo perfecto más pequeño posible, que sea divisible por 13, 72 y 81.

13. Divídase 300 en dos partes, de modo que su $D=12$, y su $M=1\,872$.

14. Determínense dos números cuyo $D=9$, y cuyo $M=1\,287$.

15. Determínese un número mayor que 500 y menor que 900, múltiplo de 9 y de 11.

16. Un número A es de la forma $A=2^{\alpha}\times 3^{\beta}\times 5^{\gamma}$. Los números $16A$, $27A$ y $25A$ tienen doble número de divisores que A. Determínese el número primitivo.

17. El número $A=2^{\alpha}\times 3^{\beta}\times 5^{\gamma}$. Determínese, sabiendo que pierde 6 divisores al dividirlo por 2; 8, si se le divide por 3 y también pierde 6 si se hace la división entre 5.

18. Un polinomio dividido por $(x-3)$ da de resto -165, y su valor numérico para $x=-1$ es -45. ¿Qué resto produce si se le divide por x^2-2x-3?

19. El polinomio $A(x)$, dividido por $(x+1)$ da de resto -3; $A(2)=6$ y $A(1)=-5$. Determínese el resto de la división de $A(x)$ por el divisor $(x-2)(x+1)(x-1)$.

20. Se establece la ecuación de segundo grado $x^2-2(k+1)x+3k+2=0$. Se pide determinar, en función de k, la suma de los cubos de sus dos raíces.

21. Calcúlense las tres raíces enteras del polinomio $A(x)=x^3-2x^2-x+2$. Después, descompóngase la fracción

$$\frac{2x^2+x-7}{x^3-2x^2-x+2}$$

en suma de tres fracciones de denominadores lineales.

22. Se sabe que el polinomio $A(x)$ es de tercer grado y que es divisible por $(x+1)$. Además,

$$A(3)=A(4).$$

Establézcase $A(x)$, y luego resuélvase la ecuación $A(x)=0$.

23. Justifíquese que el máximo común divisor de

$$A(x)=x^4-14x^3+48x^2+14x-49 \quad \text{y} \quad B(x)=x^3-15x^2+63x-49$$

es el de menor grado.

24. Calcúlese el parámetro k de los polinomios

$$A(x)=x^4+kx^3-2x^2+7x+k \quad \text{y} \quad B(x)=x^2-4x-k,$$

para que $A(x)$ sea divisible por $B(x)$. Luego, resuélvase la ecuación $A(x)=0$.

25. Descompóngase en suma de tres fracciones de denominadores lineales la fracción

$$g(x)=\frac{3x^2+kx+11}{x^3+6x^2+11x+6},$$

sabiendo que k es el número de divisores naturales de 54 000.

26. El máximo común divisor de los polinomios

$$A(x)=x^4-3x^3+3x^2-3x+k$$
$$B(x)=x^3-4x^2+5x-2,$$

es un polinomio de segundo grado. Determínese k, y, luego, hállense los ceros de ambos polinomios.

27. Calcúlese únicamente el décimo término del desarrollo de $(2x-3y)^{10}$.

28. Determínese el octavo término de $(2a-b)^{12}$.

29. Establézcase el undécimo término del desarrollo de

$$\left(\frac{x-2}{3}-\frac{2}{y-2}\right)^{14}.$$

30. Hállese el término independiente del desarrollo de

$$\left(\frac{1}{x}-2x^2\right)^{10}.$$

31. Los valores numéricos de los términos segundo, tercero y cuarto del desarrollo de $(a+b)^k$ son 240, 720 y 1 080, respectivamente. Determínense los valores de a, b y k, sabiendo que no tienen divisores comunes.

32. Los coeficientes de los términos a_k, a_{k+1} y a_{k+2} del desarrollo de $(x+y)^{14}$ están en progresión aritmética. Determínese k, sabiendo que $k\leqslant 6$.

2.6

Autoevaluación A-2

1. La igualdad $A(x)=0$ se verifica para $a \in Q$. Por eso, $A(x)=0$ es

a) un polinomio;
b) una ecuación;
c) una función;
d) una variable.

2. Polinomio es

a) un conjunto de letras y números relacionados por los signos $\pm$;
b) una sucesión de Q en N;
c) una sucesión de racionales, todos nulos a partir de un determinado orden;
d) una suma de dos o más binomios.

3. El grado del polinomio $p=(1/2, 0, 2/3, 1/5, 0, 0, \ldots)$ es

a) 1/5;
b) tercero;
c) cuarto;
d) segundo.

4. Se tiene un cualquiera $A(x)$ del conjunto de los polinomios, y sucede con un determinado $B(x)$:

$$A(x)+B(x)=A(x).$$

Se puede asegurar que $B(x)$

a) es opuesto al $A(x)$;
b) es de grado cero;
c) es el polinomio inverso;
d) es el polinomio nulo.

5. El polinomio nulo es

a) x^0;
b) $0x^0 + 1x^1$;
c) $(0, 0, 0, \ldots)$;
d) $(1, 0, 0, \ldots)$.

6. Se sabe que los polinomios

$$A(x) = x^3 + 2x^2 - 1 \quad \text{y} \quad B(x) = (a_0, a_1, a_2, a_3, 0, 0, \ldots).$$

son iguales, Por eso se puede asegurar que

a) $a_0 = -1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$;
b) $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = -1$, $a_3 = 0$;
c) $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = -1$;
d) $a_0 = -1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$.

7. La adición en Z y también en $\mathcal{P}[x]$ dota a estos conjuntos de estructura de

a) anillo;
b) anillo abeliano;
c) grupo abeliano;
d) anillo abeliano con elemento 1.

8. La multiplicación en Z y también en $\mathcal{P}[x]$ dota a estos conjuntos de estructura de

a) anillo multiplicativo;
b) anillo abeliano;
c) grupo abeliano;
d) semigrupo abeliano con elemento 1.

9. La terna $(Z, +, \times)$, lo mismo que la $(\mathcal{P}[x], +, \times)$, alcanza estructura de anillo abeliano con elemento unidad. Por eso es necesario que, además de ser un grupo aditivo abeliano y un semigrupo multiplicativo abeliano con elemento unidad,

a) la adición sea distributiva respecto de la multiplicación;
b) todos los elementos sean inversibles;
c) la multiplicación sea distributiva respecto de la adición;
d) tenga elemento unidad.

10. Si a es un cero del polinomio $A(x)$, la división $A(x):(x-a)$

a) es exacta;
b) no es exacta;
c) da de resto a;
d) $P(-a) = 0$.

11. El teorema de Ruffini se expresa:

a) $P(a)=0 \iff P(x)=\overset{\cdot}{x-a}$;

b) $P(a)=0 \implies P(x)=\overset{\cdot}{x-a}$;

c) $P(x)=\overset{\cdot}{x-a} \implies P(a)=0$;

d) $P(x):(x-a)=Q(x)+0$.

12. El término general del desarrollo de $(a-b)^n$ es tal que soluciona todos los $n+1$ términos del desarrollo, y es:

a) $T_k=\binom{n}{k}a^{n-k}\cdot b^k$;

b) $T_k=\binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^{k-1}$;

c) $T_k=(-1)^{k-1}\binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^{k-1}$;

d) $T_k=(-1)^{k+1}\binom{n}{k-1}a^nb^{k-1}$.

13. Valor numérico de un polinomio para $a \in Q$ es:

a) una aplicación de $\mathcal{O}[x]$ en Q, que hace corresponder a cada $p(x) \in \mathcal{O}[x]$ la imagen de a, dada por la función asociada a $p(x)$;
b) el valor que resulta cuando se sustituye a en el polinomio;
c) el resto de dividir por $(x-a)$;
d) el valor del polinomio para ese número.

14. El resto de la división del polinomio $A(x)$ entre el $B(x)=x^3+4x-2$

a) es un polinomio de grado 3;
b) depende su grado del de $A(x)$;
c) es de grado 2;
d) es de grado menor o igual que 2.

15. El número 28 es congruente con 13, módulo 5, porque su diferencia es múltiplo del módulo; o, lo que es igual, porque dan el mismo resto al dividir por 5. La expresión general de todos los enteros congruentes con 7, módulo 5, es:

a) $7k \equiv 7\ (5$;
b) $5k+2 \equiv 7\ (5$;
c) $2k+7 \equiv 7\ (5$;
d) $5k+7 \equiv 7\ (5$.

16. El polinomio x^3-1 es congruente con el $x-1$, respecto del módulo

a) x_2+1;
b) no pueden ser congruentes;
c) $x-1$;
d) x^2-1.

17. Para que $A(x)=x^5-3x+k$ sea divisible por $x+1/2$, es necesario que k valga

a) cero;
b) nunca podrá ser divisible por una fracción;
c) $k=-11/8$;
d) $k=13/8$.

18. El principio de identidad de polinomios dicta: Dos polinomios son iguales

a) si tienen los mismos coeficientes;
b) si toman el mismo valor numérico para $a \in Q$;
c) si tienen el mismo valor numérico $\forall a \in Q$;
d) si tienen el mismo número de ceros.

19. Ideal de un anillo A es:

a) cualquier subanillo de A;
b) un subanillo $I / a \in I$, $\forall b \in A$, $a \cdot b \in I$;
c) un subconjunto de divisores;
d) un subconjunto I, tal que $a \in A$, $\forall b \in I$, $a \cdot b = I$.

20. El conjunto $(\dot{5}) \subset Z$ es un ideal de Z, porque:

a) $(\dot{5})$ es subanillo de Z;
b) cualquier entero multiplicado por un $\dot{5}$, sigue perteneciendo a I;
c) $[(\dot{5}), +, \times]$ es anillo, y el producto de un $\dot{5}$ por cualquier entero es $\dot{5}$;
d) es que $(\dot{5})$ no es ideal de Z, por ser primo.

21. Si sucede que el conjunto de los divisores del número A tiene de cardinal 2, se puede asegurar que:

a) A es par;
b) A es primo;
c) A es compuesto;
d) A es primo con 2.

22. El conjunto de los divisores comunes de los números A y B es unitario. Entonces:

a) esos números coinciden;
b) son primos;
c) son primos entre sí;
d) ha de tener, al menos, dos elementos.

23. Si sucede que el máximo común divisor de los polinomios $A(x)$ y $B(x)$ es $B(x)$, puede asegurarse que

a) $A(x) = \overset{\bullet}{\overline{B(x)}}$;

b) $B(x) = \overset{\bullet}{\overline{A(x)}}$;

c) todos los factores de $A(x)$ los tiene $B(x)$;

d) $A(x)$ es mayor que $B(x)$.

24. Siendo D y M el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los enteros a y b, sucede que:

a) $M/D = a/b$;

b) $a \cdot b = M \cdot D$;

c) $D < a < M$;

d) $M \cdot D > a \cdot b$.

25. Al dividir los números A y B por su máximo común divisor, se han obtenido los cocientes 8 y 22. Por ello,

a) a y b son pares;

b) a y b no son primos entre sí;

c) no son posibles esos resultados;

d) a y b son múltiplos de 2 y de 11.

26. Para poder simetrizar un semigrupo es necesario:

a) que sea abeliano y cancelático;

b) que tenga elemento neutro;

c) hacer el cartesiano;

d) que sea multiplicativo.

27. Dados los polinomios

$$A(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$$
$$B(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$$

1.º Calcúlese $A+B$; $A-B$; $A \times B$; $A:B$;

2.º Determínese $A(3)$ y $B(-3/2)$;

3.º Descompónganse en factores $A(x)$ y $B(x)$;

4.º Simplifíquese $B(x)/A(x)$;

5.º Establézcase su máximo común divisor.

28. El producto de dos números es 3 456, y su máximo común divisor es 24. Determínense.

29. Establézcase el término independiente del desarrollo de $(2x - 1/x^2)^{18}$.

30. Un número es de la forma $A = 7^{\alpha} \times 2^{\beta}$, y se sabe que tiene diez divisores. Al dividirlo por 4, se le priva de cuatro divisores. Determínese ese número A.

FICHA-CLAVE DE LA AUTOEVALUACION A-2

1.	*b).*	**7.**	*c).*	**12.**	*c).*	**17.**	*c).*	**22.**	*c).*
2.	*c).*	**8.**	*d).*	**13.**	*a).*	**18.**	*c).*	**23.**	*a).*
3.	*b).*	**9.**	*c).*	**14.**	*d).*	**19.**	*b).*	**24.**	*b).*
4.	*d).*	**10.**	*a).*	**15.**	*b).*	**20.**	*c).*	**25.**	*c).*
5.	*c).*	**11.**	*a).*	**16.**	*a).*	**21.**	*b).*	**26.**	*a).*

6. *a).*

27. 1.º $A+B=x^4+x^3-4x^2-x+3$;
$A-B=x^4-3x^3-10x^2+3x+9$;
$A\times B=2x^7+10x^6-19x^5-20x^4+32x^3+37x^2-15x-18$;
$A:B=$ cociente: $x/2-5/4$; resto: $-9/4x^2-9/4$.

2.º $A(3)=0$; $B(-3/2)=0$.

3.º $A(x)=(x+1)(x-1)(x-3)(x+2)$;
$B(x)=(x+1)(x-1)(2x+3)$.

4.º $\dfrac{B(x)}{A(x)}=\dfrac{2x+3}{x^2-5x+6}$.

5.º x^2-1.

28. (24 y 144) ó (48 y 72).

29. 76 038 144.

30. $A=112$.

UNIDAD TEMATICA 3

INTRODUCCION A $\mathscr{R}$. FUNCIONES Y ECUACIONES

3.1. Introducción al número real. Aproximación decimal. Radicales

1. *Potenciación en Q*
2. *Expresión decimal de un elemento de Q*
3. *La recta racional*
4. *El orden denso de los racionales y la recta racional llena de agujeros*
5. *Irracionalidad de* $\sqrt{2}$
6. *Puntos de la recta no racionales*
7. *Aproximaciones decimales*
8. *Operaciones con números reales. El cuerpo de los números reales.*
9. *Radicales*
10. *Relación de equivalencia en el conjunto de los radicales*
11. *Operaciones con radicales*
12. *Potenciación de exponente racional*
13. *Simplificación de un radical. Radicales semejantes*
14. *Extensión radical de Q*

3.2. Funciones polinómicas de variable real. Representación gráfica

1. *Introducción*
2. *Elementos de una función polinómica*
3. *Aplicaciones y funciones*
4. *Función constante. Función idéntica. Producto de función. Funciones lineales inversas.*
5. *Función cuadrática* $y = x^2$
6. *Función* $y = ax^2$

7. *Trinomio de segundo grado. Representación gráfica*
8. *Signo del trinomio de segundo grado*
9. *Valores extremos de un trinomio de segundo grado*
10. *Funciones polinómicas de grado mayor que dos*

3.3. Ecuaciones

1. *Ecuaciones*
2. *Ecuaciones equivalentes*
3. *Criterios de equivalencia*
4. *Multiplicación de una ecuación por un número*
5. *Grado de una ecuación entera.*
6. *Resolución de la ecuación de primer grado*
7. *Interpretación geométrica*
8. *Ecuación de segundo grado*
9. *Resolución de la ecuación completa de segundo grado*
10. *Discriminante de una ecuación de segundo grado. Discusión*
11. *Suma y producto de las raíces de una ecuación de segundo grado*
12. *Determinación de la ecuación de segundo grado, conociendo la suma y el producto de sus raíces*
13. *Ecuaciones reducibles a enteras*
14. *Ecuaciones irracionales*

3.4. Sistemas de ecuaciones. Inecuaciones

1. *Ecuación de primer grado con dos incógnitas*
2. *Representación gráfica*
3. *Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas*
4. *Método de resolución. Resolución gráfica*
5. *Método de igualación*
6. *Método de sustitución*
7. *Método de reducción*
8. *Discusión de un sistema de dos ecuaciones de primer grado*
9. *Sistemas no lineales*
10. *Sistemas lineales de tres o más ecuaciones con tres o más incógnitas*
11. *Inecuaciones*
12. *Inecuación de primer grado con una incógnita*
13. *Sistemas de inecuaciones de primer grado en una incógnita*
14. *Inecuación de primer grado con dos incógnitas*
15. *Sistemas de inecuaciones con dos incógnitas*
16. *Programación lineal*

3.5. Ejercicios y problemas de recapitulación

3.6. Autoevaluación A-3

3.1

Introducción al número real. Aproximación decimal. Radicales

1. POTENCIACION EN Q

Se define una aplicación de $Q \times N$ en Q, llamada *potenciación en Q*, del siguiente modo:

$$Q \times N \to Q$$
$$(q, n) \to q^n = q \cdot q \cdot q \cdot \ldots \cdot (n \text{ veces}$$

Ejemplo 1

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}.$$

A la primera proyección del par (q, n) se la denomina **base**; a la segunda se la llama **exponente**, y la imagen, q^n, recibe el nombre de «potencia n-sima» del racional q.

Ejercicio 1

Calcúlese

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^4 \quad y \quad \left(\frac{1}{2}\right)^4.$$

La aplicación «potenciación», ¿es inyectiva?

El alumno recordará, de aprendizajes anteriores, cuáles son las reglas para operar estas potencias. Los ejercicios que siguen le ayudarán a actualizar esos automatismos.

Ejercicio 2

Opérese lo que se indica:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)$;

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 : \left(\frac{1}{2}\right)^3$;

c) $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right]^3$.

Podría pensarse en establecer una aplicación similar a la que inició el capítulo, pero, en lugar de tomar como conjunto original el cartesiano $Q \times N$, utilizar el cartesiano $Q \times Z$; es decir, establecer la potenciación de racionales con exponentes enteros. ¿Qué sentido tiene eso?

Ejemplo 2

¿Qué significado tiene la potencia $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$? Ciertamente, nada significa repetir «menos tres veces» la base como factor.

Sin embargo, véase lo razonable que resulta utilizar simbólicamente exponentes enteros, viendo estos ejemplos y realizando los ejercicios que siguen.

Ejemplo 3

Simplifíquese la expresión

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^4} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

Si, en lugar de simplificar, se usa la regla de la división de potencias de igual base, resulta:

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^4} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2-4} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}.$$

Entonces, se puede establecer este convenio de escritura

$$\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$$

En general, se conviene en escribir $q \in Q$, $-n \in Z$

$$\boxed{q^{-n} = \frac{1}{q^n}}$$

Es fácil comprobar que estas expresiones con exponentes negativos admiten las reglas de operación de las de exponentes naturales.

Ejercicio 3

Calcúlese:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$; *b)* $3^4 : 3^{-1}$.

Ejercicio 4

Hállese el valor de

a) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]^{-3}$; *b)* $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}\right]^{-1}$.

En la misma línea, el exponente $0 \in Z$ actúa de igual modo, siguiendo el convenio establecido. O sea, $q \in Q$,

$$q^0 = 1.$$

Véase lo razonable de este convenio.

Ejemplo 4

$$\left(\frac{1}{2}\right)^8 : \left(\frac{1}{2}\right)^8 = 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^8 : \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{8-8} = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \longrightarrow \boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1}$$

Ejercicio 5

Opérese

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}}{\left(\frac{2}{3}\right)}$$

En general, se conviene en escribir:

$$\boxed{q^0 = 1}$$

2. EXPRESION DECIMAL DE UN ELEMENTO DE Q

Constantemente se encuentran escritas, en Matemáticas, expresiones numéricas como éstas:

a) 0,17; *b)* 2,3; *c)* 0,333...; *d)* $0,12\widehat{5}$.

¿A qué conjunto numérico pertenecen?
¿A los naturales?, ¿a los enteros? Evidentemente, no.

Son expresiones de números racionales. Es decir, son números que pertenecen a Q. Veamos el modo de encontrar su fracción canónica:

a) $0,17=\frac{17}{100}$;

b) $2,3=\frac{23}{10}$;

c) $0,333\ldots=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\ldots=\frac{3/10}{1-1/10}=\frac{3}{10-1}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$;

d) $0,12\widehat{5}=\frac{12}{100}+\frac{5}{10^3}+\frac{5}{10^4}+\ldots=\frac{12}{100}+\frac{5/1\,000}{1-1/10}=\frac{12}{100}+\frac{5}{900}=\frac{113}{900}$.

Los casos *a)* y *b)* han dado lugar a fracciones cuyos denominadores son potencias de 10. Por eso reciben el nombre de *fracciones decimales;* los *c)* y *d)* no han producido fracciones con denominador potencia de 10, por cuya razón a los racionales de este tipo se los llama *fracciones no decimales.* Entonces,

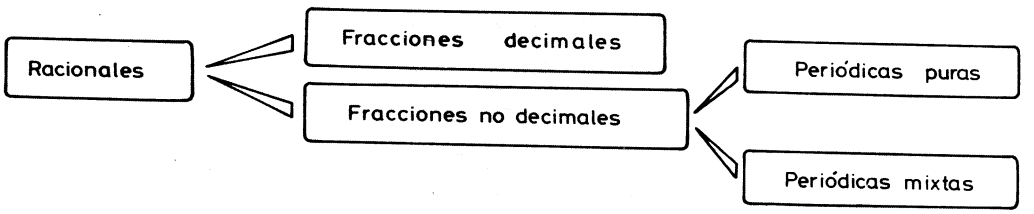


FIG. 3.1.

Recíprocamente,

Todo racional equivale a una fracción decimal exacta o periódica.

Ejemplo 5

a) El racional $\frac{5}{32}=0{,}15625$. En efecto:

$$\begin{array}{l|l} 5 & 32 \\ \hline 180 & 0{,}15625 \\ 200 & \\ 080 & \\ 160 & \\ 00 & \end{array}$$

b) El decimal $\frac{2}{3}=0{,}666\ldots$, ya que

$$\begin{array}{l|l} 20 & 3 \\ \hline 20 & 0{,}66\ldots \\ 2 & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \end{array}$$

Ejercicio 6

Determínense las expresiones decimales de los racionales

a) $\frac{12}{125}$; *b)* $\frac{6}{16}$; *c)* $\frac{20}{6}$.

¿Hay números decimales que sean ni exactos ni periódicos?

Sí, es lícito pensar en expresiones numéricas con un número ilimitado, no periódico, de cifras decimales, como, por ejemplo,

$$3{,}141592\ldots$$
$$2{,}7183\ldots$$

Estos números no son racionales.

Ejercicio 7

Usted conoce esta expresión numérica: $\sqrt{2}$.
Determine esa raíz cuadrada, sacando «unos cuantos decimales».

El resultado del ejercicio 7 tampoco es decimal exacto, ni periódico.

3. LA RECTA RACIONAL

Se puede establecer una aplicación de Q en los puntos de la recta r, de manera que, fijado un origen O, que es imagen del racional 0, se hace corresponder, a cada Q, el punto $A \in r$, cuya abscisa es a (Fig. 3.2).

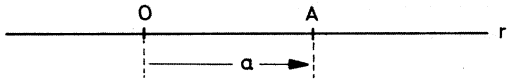


FIG. 3.2.

Ejemplo 6

Represéntense, sobre la recta r, los racionales $1/2$, $-3/4$, 2, $-1{,}8$ (Fig. 3.3).

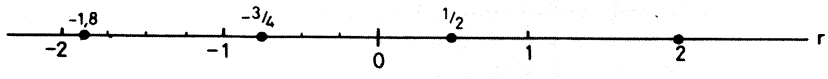


FIG. 3.3.

Ejercicio 8

Tomando como unidad un decímetro, sobre papel milimetrado, represéntense, en la recta r, los racionales $2/3$, $-1/5$, $0{,}7$.

Tal vez la dificultad aparezca cuando se intente representar un racional no decimal; por ejemplo, el periódico $2/3 = 0{,}666\ldots$

Sin embargo, dividiendo la unidad en tres partes y tomando dos, como se hace en la figura 3.4, *el problema queda solucionado, y, ciertamente, todos los racionales —hasta los periódicos— tienen imagen puntual en la recta racional* (Fig. 3.4) *.

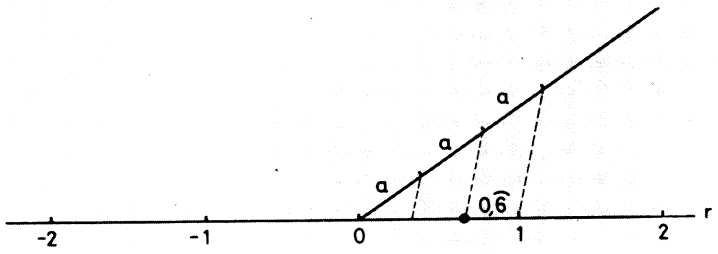


FIG. 3.4.

Ejercicio 9

Determínese sobre la recta r el punto-imagen del racional periódico $2{,}\widehat{3}$.

---

* No se nos escapa que en la construcción subyace el número real. Entendemos, sin embargo, su uso, didácticamente lícito.

4. EL ORDEN DENSO DE LOS RACIONALES Y LA RECTA RACIONAL LLENA DE AGUJEROS

Entre dos racionales cualesquiera, siempre hay uno de valor intermedio.

Ejemplo 7

¿Hay algún racional entre 1/2 y 1/3?
Sí, hay un número ilimitado. Uno de ellos es:

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{2}=\frac{\frac{5}{6}}{2}=\frac{5}{12}$$

$$\frac{1}{2}>\frac{5}{12}>\frac{1}{3}$$

¿Y entre $\frac{5}{12}$ y $\frac{1}{3}$?
Existe un número ilimitado de ellos, por ejemplo, éste:

$$\frac{\frac{5}{12}+\frac{1}{3}}{2}=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$$

$$\frac{5}{12}>\frac{3}{8}>\frac{1}{3}$$

Este resultado tiene amplitud general. En efecto:
Sean dos racionales cualesquiera

$$\frac{a}{b}>\frac{c}{d}.$$

Siempre es posible encontrar otro, comprendido entre ambos

$$\frac{a}{b}>\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{2}>\frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{b}>\frac{ad+bc}{2bd}>\frac{c}{d}$$

Esta propiedad se expresa diciendo:

> El conjunto de los racionales Q es un conjunto con orden denso.

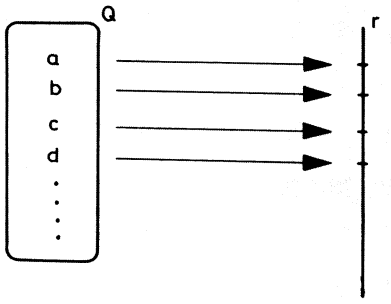


FIG. 3.5.

Pues bien, a pesar de que hay *infinitos racionales,* sus imágenes puntuales sobre la recta *r* no recubren todos los puntos de esa recta.

> La aplicación $Q \rightarrow r$, que es inyectiva, no es **exhaustiva.** La recta racional está llena de un número ilimitado de *agujeros.*

¿De qué podrían ser imágenes esos puntos de *r* que no tienen antecedente racional?

Las expresiones decimales de ilimitado número de cifras no periódicas; el resultado de $\sqrt{2}$, de $\sqrt{3}$, ...; números que usted ha visto más de una vez, como π, *e,* ..., son otros tantos *entes numéricos* que no son racionales, y que tienen su imagen en la recta *r.*

Todo ese tipo de números, «que se salen de *Q*», van a completar, por primera vez, el campo numérico: se trata del conjunto de los números **reales.**

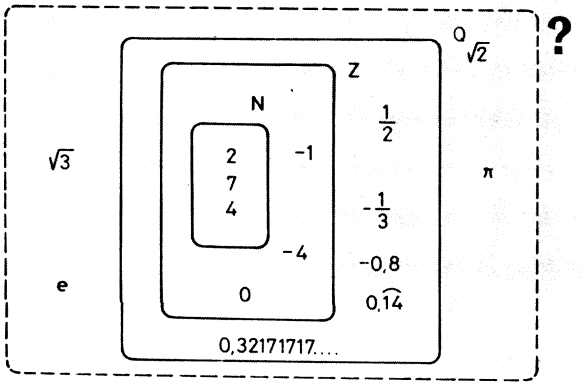


FIG. 3.6.

5. IRRACIONALIDAD DE $\sqrt{2}$

Uno de los descubrimientos más importantes de los matemáticos griegos fue el hecho de que hay números irracionales, es decir, no representables en la forma p/q, donde p y q son enteros. Concretamente, si se aplica el teorema de Pitágoras a un triángulo rectángulo de catetos iguales a 1 resulta que la hipotenusa a vale

$$a = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

El razonamiento que ellos siguieron para darse cuenta de que $\sqrt{2}$ no es racional es el siguiente:

Supóngase que existe un número racional cuyo cuadrado valga 2.

Tal número racional puede darse por medio de una fracción *irreducible*. Sea p/q dicha fracción. Entonces,

$$\frac{p^2}{q^2} = 2, \quad \text{es decir,} \quad p^2 = 2q^2. \qquad [1]$$

Como $2q^2$ es un número par, p^2 debe ser par. Pero entonces p debe ser par, pues el cuadrado de un número impar es siempre impar.

Como p es par, $p = 2r$, donde r es otro número entero. Entonces,

$$p^2 = (2r)^2 = 4r^2$$

Por tanto, sustituyendo en [1], $4r^2 = 2q^2$, y dividiendo por 2, resulta:

$$2r^2 = q^2.$$

Ahora, $2r^2$ es par, luego q^2 es par y, como antes, q debe ser par.

En resumen, partiendo de la fracción irreducible p/q se ha llegado a que tanto p como q deben ser números pares, lo cual es imposible desde el momento en que p y q, como términos de una fracción irrreducible, deben ser primos entre sí.

CONSECUENCIA: Al llegar a un absurdo hay que rechazar la hipótesis de la que se partió, y se llega a la conclusión:

No existe ningún número racional cuyo cuadrado sea 2

que también suele expresarse

$\sqrt{2}$ es un número irracional

Esta última forma encierra una incorrección desde el momento en que los únicos números que conocemos son los racionales, por lo que decir que $\sqrt{2}$ es un número irracional supone, de alguna manera, que se ha hecho una exten-

sión del concepto de número, incluyendo junto con los racionales otros elementos entre los cuales se encuentra uno cuyo cuadrado es 2. Y esta extensión es la que vamos a abordar.

Ejercicio 10

Siguiendo el mismo razonamiento utilizado para demostrar la irracionalidad de $\sqrt{2}$*, demuéstrese que también es irracional* $\sqrt{3}$.

6. PUNTOS DE LA RECTA NO RACIONALES

En el epígrafe 4 quedó dicho que la aplicación de Q en los puntos de la recta es inyectiva, pero no exhaustiva: hay una infinidad de puntos de r que no son imagen de ningún racional, por ejemplo, el punto P de la figura 3.7.

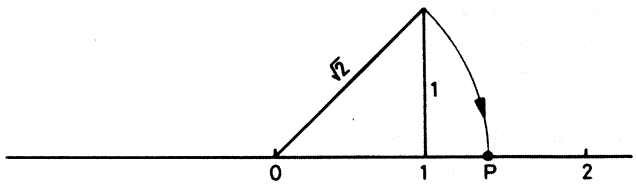


FIG. 3.7.

Aun cuando no sea posible atribuir una abscisa racional a un punto tal como P, existen puntos «tan próximos a P como queramos» que tienen abscisas racionales.

Para ver esto, observemos que P está comprendido entre los puntos de abscisas (racionales) 1 y 2. Si se divide el intervalo [1, 2] en diez partes iguales, se obtienen los intervalos

$$[1;\ 1{,}1];\quad [1{,}1;\ 1{,}2];\ \ldots;\ [1{,}9;\ 2].$$

Es claro que P debe estar en alguno de éstos, y no podrá ser ninguno de los extremos de estos intervalos, pues todos ellos tienen abscisa racional. En nuestro caso concreto está en el intervalo [1,4; 1,5]. Cualquiera de los dos números racionales 1,4 ó 1,5 constituyen mejores aproximaciones a $\sqrt{2}$ que 1 ó 2, extremos del intervalo con el que empezamos.

Si ahora se vuelve a dividir [1,4; 1,5] en otras diez partes iguales, se ve que P está en el intervalo

$$[1{,}41;\ 1{,}42].$$

Así se puede continuar. Ya deben de haberse reconocido en estos números los valores por defecto y por exceso que obtenemos, al ir extrayendo cifras decimales de $\sqrt{2}$.

El proceso que se acaba de ilustrar con el punto P se puede también realizar con un punto que sea el representante de un número racional. Hagámoslo para el número racional 1/3.

Representando 1/3 sobre la recta se obtiene el punto Q. Se ve que está en el intervalo [0, 1]. Dividiendo el intervalo en diez partes iguales, el punto Q no puede coincidir con ninguno de los puntos de división, pues todos ellos

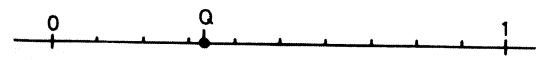


FIG. 3.8.

corresponden a fracciones decimales, y 1/3 no es una fracción decimal. Q debe de hallarse en uno de los intervalos, y en efecto está en el [0,3; 0,4]. Si ahora se vuelve a dividir este intervalo en diez partes iguales, vuelve a encontrarse que Q se halla en

$$[0{,}33,\ 0{,}34]$$

y así puede proseguirse. Se observa que los extremos de los sucesivos intervalos que contienen a Q son las aproximaciones *decimales* por defecto y por exceso del número racional 1/3.

7. APROXIMACIONES DECIMALES

De lo anterior se desprende que los puntos de la recta se dividen en tres clases:

1) Los que tienen abscisa *decimal.* Ejemplo: -3, 0,4, 1,125.
2) Los que tienen abscisa *racional,* pero no decimal. Ejemplo: 1/3, 13/7, etc.
3) Los puntos que no tienen abscisa racional, de los que se han puesto ejemplos anteriormente.

Dado un punto de la primera clase, siempre es posible, considerando el intervalo de extremos enteros en el que está contenido (si no tiene abscisa entera), llegar después de un número finito de subdivisiones a la conclusión de que el punto es uno de los de subdivisión del intervalo en 10, 100, 1000, etc., partes iguales.

Ejemplo 8.

Si se considera el punto de abscisa 1,125, se encuentra que está situado en el intervalo [1, 2]. Después de dividir éste en diez partes iguales se halla en el intervalo

$$[1{,}1,\ 1{,}2].$$

Dividido de nuevo éste, el punto se encuentra en [1,12, 1,13]. Finalmente, una nueva división sitúa el punto en uno de los que forman las subdivisiones de este último intervalo.

Para los puntos de la segunda y tercera clase no ocurre lo mismo, y el proceso no se termina. Cada vez se van obteniendo intervalos más pequeños (la décima parte de los precedentes) en los que se encuentra el punto. Los extremos de dichos intervalos constituyen aproximaciones decimales por defecto y por exceso del número racional abscisa del punto, si es de la segunda clase, o ... ¿de qué, si el punto es de la segunda? Pues, por similitud con el caso de abscisa racional, diremos que constituyen aproximaciones decimales de un número irracional.

El conjunto de todos los números racionales e irracionales se llama conjunto de números reales, y se representa por R.

Tenemos la inclusión $Q \subset R$.

El proceso mediante el cual se van obteniendo aproximaciones decimales de números racionales no decimales o de números irracionales suele indicarse mediante un decimal de infinitas cifras:

$$1/3 = 0{,}333333...$$

$$\sqrt{2} = 1'41421356...$$

La diferencia esencial entre ambos tipos reside en que en el primer caso, como ya se sabe, el decimal ilimitado es periódico desde un lugar en adelante, mientras que, cuando representa a un número irracional, no lo es.

La forma en que hemos actuado permite, dado un número cualquiera, racional o irracional, disponer de números decimales que se aproximan al dado con un error menor que una cantidad prefijada de antemano. Por ejemplo, si se quiere tener un valor aproximado en menos de una milésima a $\sqrt{2}$ basta tomar 1,414 si se quiere por defecto, o 1,415 si por exceso, ya que de la representación decimal ilimitada se desprende que $\sqrt{2}$ está en el intervalo [1,414; 1,415], por lo que su distancia a los extremos del mismo será, en valor absoluto, menos que la amplitud del intervalo en el que está contenido, y en este caso el intervalo mide una milésima.

Ejercicio 11

Dénse valores aproximados, en menos de una diezmilésima, de los números

$$22/7, \quad 1/3, \quad \sqrt{2}, \quad \pi.$$

8. OPERACIONES CON NUMEROS REALES. EL CUERPO DE LOS NUMEROS REALES

A partir de las aproximaciones decimales es posible definir las operaciones suma y producto entre números reales. Por ejemplo, si partimos de los números reales

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$$
$$\pi = 3{,}14159265\ldots,$$

tomando las aproximaciones decimales en menos de un entero, una décima, una centésima, etc., y sumándolas, obtenemos la sucesión de aproximaciones

$$4,\quad 4{,}5,\quad 4{,}55,\quad 4{,}555,\quad \ldots,$$

que definen un número real que se llama «suma de los dos dados». De igual forma se define el producto. Se puede demostrar, y será objeto de cursos más avanzados, que la suma de números reales tiene las propiedades

I) Asociativa.
II) Existe elemento neutro, que es el 0.
III) Cada número real a tiene un opuesto $-a$ tal que $a+(-a)=0$.
IV) Conmutativa.

Para el producto se tienen las propiedades

V) Asociativa.
VI) Existe elemento neutro que es el 1.
VII) Cada número real $a \neq 0$ tiene un inverso $1/a$ tal que $a \cdot (1/a) = 1$.
VIII) Conmutativa.

Además, está la ley distributiva de la multiplicación respecto de la adición

IX) Para cualesquiera números reales a, b y c:

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Por cumplirse las nueve leyes apuntadas, se puede enunciar:

> La adición y multiplicación dotan al conjunto de los números reales de estructura de cuerpo abeliano
>
> $[R, +, \times]$ es un **cuerpo**

Ejercicio 12

Escríbanse dos números irracionales y las primeras aproximaciones decimales a su suma.

Ejercicio 13

Si a es un número irracional, ¿puede ser racional $1/a$*?*

Ejercicio 14

La suma de dos números racionales, ¿puede ser irracional? Y la suma de dos irracionales, ¿puede ser racional? Pónganse ejemplos para ilustrar la respuesta.

El cuerpo de los números reales es un cuerpo ordenado en el sentido de que, al igual que en los números racionales, se puede señalar un conjunto de elementos positivos, otro conjunto de negativos y el cero, de forma que todo elemento esté en uno de ellos.

La sustracción en $\mathfrak{R}$ se define así,

$$a \in \mathfrak{R}, \quad b \in \mathfrak{R}$$
$$a - b = a + (-b).$$

Establecida la sustracción, se define una relación de orden en $\mathfrak{R}$ de la siguiente manera:

$$a \in \mathfrak{R}, \quad b \in \mathfrak{R}$$
$$a > b \iff a - b \in \mathfrak{R}^+;$$

es decir: el real a es mayor que el b si, y sólo si, su diferencia es positiva.

9. RADICALES

Dado un racional a, se define «raíz n-sima» de a como un número r, que elevado a n reproduce a:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = r \iff r^n = a}$$

No siempre tiene sentido la equivalencia establecida:

A) Si el *radicando* a es negativo y n es par, no existe un número real r, tal que $r^n = a$.

Ejemplo 9

$$\sqrt[4]{-16} = x \iff x^4 = -16.$$

El número real x no existe.

B) Aun cuando n no sea par, no siempre existe un racional r que, elevado a n, produzca el racional a.

Ejemplo 10

$$\sqrt[3]{5}=y \iff y^3=5.$$

No existe el racional y que, elevado al cubo, dé 5.

Pero sí existe el real y, cuyo cubo es 5. Precisamente, el representado de este modo:

$$\sqrt[3]{5} \in R$$

$$(\sqrt[3]{5})^3=5$$

DEFINICIÓN: Se llama radical a una expresión formal del tipo $\sqrt[n]{a}$, con las siguientes características:

a) no tiene solución en Q;
b) $n \in N$ y $a \in Q$;
c) si $a \in Q^-$, entonces n es impar.

Acabamos de ver que un radical, como queda definido, siempre tiene sentido en el conjunto de los reales:

Si existe un $r \in Q$, tal que $r^n=a$, $\sqrt[n]{a}$ pertenece a Q. No es un radical.

Si no existe un $r \in Q$, tal que $r^n=a$, entonces $\sqrt[n]{a}$ se dice que es un radical perteneciente a los reales irracionales.

Bueno será disponer un cuadro donde quede resumido lo que se lleva dicho (Fig. 3.9).

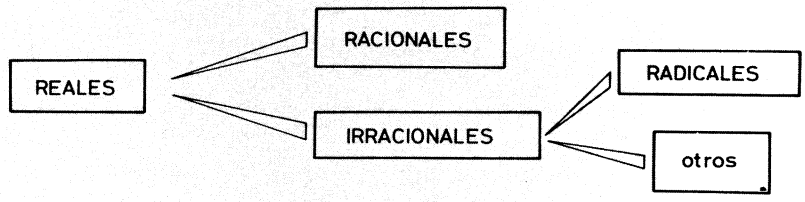


FIG. 3.9.

Ejercicio 15

De las siguientes raíces, obténganse las definidas en Q y dígase cuáles representan números irracionales:

$$\sqrt[3]{-8};\quad \sqrt{288};\quad \sqrt[5]{7776};\quad \sqrt[3]{81};\quad \sqrt[4]{256}.$$

Adviértase que cuando el índice del radical es par, puede presentarse una ambigüedad en el resultado, de acuerdo con la definición de radical. Así,

Ejemplo 11

Calcular $\sqrt[4]{16}$ supone encontrar un número real que elevado a 4 dé 16. Claramente, hay dos soluciones: $+2$ y -2.

Para evitar esta ambigüedad, entenderemos que representa siempre a la raíz positiva; es decir, $+2$. Y la negativa se denotará por $-\sqrt[4]{16}$.

En general, $\sqrt[2n]{a}$ representa la (única) raíz positiva.

10. RELACION DE EQUIVALENCIA EN EL CONJUNTO DE LOS RADICALES

En el conjunto de los radicales se establece la relación

$$\sqrt[n]{a} \text{ es equivalente a } \sqrt[m]{b} \iff a^m = b^n$$

Resulta muy fácil justificar que la relación establecida es de equivalencia, probando, en efecto, que es reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejercicio 16

Demostrar que la relación arriba establecida es de equivalencia.

La relación desarrollada en el conjunto de los radicales, por ser de equivalencia, clasifica y parte a este conjunto en clases, cada una de las cuales representa un único número irracional. Efectivamente,

$$(\sqrt[n]{a})^{m \cdot n} = a^m = b^n = (\sqrt[m]{b})^{n \cdot m}$$

Esto tiene sentido, pues elevar el número real $\sqrt[n]{a}$ a la potencia mn es multiplicarlo mn veces por sí mismo (m y n son naturales); y es válida la regla de que para elevar una potencia a otra se deja la misma base y se multiplican los exponentes.

Ejercicio 17

Agrúpense los siguientes radicales en clases de equivalencia,

$$\sqrt[3]{2}, \quad \sqrt[6]{4}, \quad \sqrt{8}, \quad \sqrt[4]{4}, \quad \sqrt[4]{64}, \quad \sqrt{2}.$$

PROPOSICIÓN FUNDAMENTAL: Si se multiplican el índice de la raíz y el exponente del radicando por un mismo número natural, el radical que se obtiene es equivalente al dado. Análogamente, si se dividen por un divisor común.

DEMOSTRACIÓN:

Sea $\sqrt[n]{a^p}$ el radical dado. Si se multiplican n y p por r, resulta el radical

$$\sqrt[nr]{a^{pr}}.$$

Ahora bien:

$$\left.\begin{array}{l}(\sqrt[n]{a^p})^{nr} = a^{p\cdot r} \\ (\sqrt[nr]{a^{pr}})^{nr} = a^{p\cdot r}\end{array}\right\} \sqrt[n]{a^p} = \sqrt[nr]{a^{pr}}$$

La consecuencia de la proposición anterior es que se pueden reducir radicales dados a radicales equivalentes con índice común.

Ejemplo 12

Dados los radicales

$$\sqrt[3]{2}, \quad \sqrt{5}, \quad \sqrt[4]{3}$$

de índices 3, 2 y 4, basta buscar el mínimo común múltiplo de los índices, en este caso, 12, para obtener los radicales equivalentes a los anteriores

$$\sqrt[12]{2^4}, \quad \sqrt[12]{5^6}, \quad \sqrt[12]{3^3}$$

que tienen todos el mismo índice.

También es posible utilizar la proposición en otro sentido, como muestra el ejemplo siguiente:

Ejemplo 13

¿Se puede simplificar el radical $\sqrt[12]{625}$?

Como $625 = 5^4$, es posible dividir el índice y el exponente del radicando, escrito en la forma

$$5^4,$$

por 4, con lo que se obtiene el radical equivalente al dado

$$\sqrt[3]{5}.$$

Ejercicio 18

Simplifíquense los radicales

$$\sqrt[6]{27}, \quad \sqrt[12]{64}, \quad \sqrt[8]{25}.$$

Ejercicio 19

Redúzcanse a índice común los radicales

$$\sqrt{2},\quad \sqrt[3]{3},\quad \sqrt[5]{5},\quad \sqrt[4]{4}.$$

11. OPERACIONES CON RADICALES

Producto de radicales

Definimos el producto de dos radicales del mismo índice como el radical que se obtiene multiplicando los radicandos y dejando el índice común.

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{6};\qquad \sqrt[3]{2^2}\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{2^2\cdot 5}=\sqrt[3]{20}.$$

En general,

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}.$$

Si los radicales no tienen el mismo índice, se reducen a índice común y se aplica lo anterior.

Para multiplicar

$$\sqrt[3]{2}\quad \text{y}\quad \sqrt{3}$$

se reducen a índice común 6 y resulta:

$$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt[6]{2^2}\cdot\sqrt[6]{3^3}=\sqrt[6]{2^2\cdot 3^3}=\sqrt[6]{108}.$$

Ejercicio 20

Multiplíquense los siguientes radicales

$$\sqrt{a}\times\sqrt[3]{ab^2}\times\sqrt[4]{a^2b^3}.$$

División de radicales

Definimos «cociente de dos radicales de igual índice» como un real que, multiplicado por el radical divisor, produce el radical dividendo.

Ejemplo 16

Divídase:

$$\sqrt[3]{16} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

En efecto,

$$\sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[16]{16}.$$

Obsérvese que, al establecer la división, se ha dicho con toda generalidad que el cociente es real. Nos obliga a ello el hecho de que es posible que al dividir dos irracionales se obtenga a veces un racional.

Ejemplo 17

$$\sqrt[4]{2} : \sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{\frac{2}{32}} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2} \in Q.$$

Si se trata de dividir dos radicales de distinto índice, previamente se establecen dos radicales equivalentes a los dados, de igual índice; todo ello como se ha indicado en la multiplicación.

Ejemplo 18

$$\sqrt{a} : \sqrt[3]{b^2} = \sqrt[6]{a^3} : \sqrt[6]{a^4} = \sqrt[6]{\frac{a^3}{b^4}}.$$

Ejercicio 21

Divídanse los siguientes radicales

a) $\sqrt{8} : \sqrt[3]{2}$; *b)* $\sqrt[3]{a^2} : \sqrt[4]{ab^2}$.

Potenciación de radicales

Como corresponde a una multiplicación simbólica de un número de factores iguales, para elevar un radical a una potencia basta elevar el radicando a dicha potencia, como resulta al aplicar la definición de multiplicación.

Si el exponente es entero negativo, se conserva el mismo formalismo convencional que quedó expuesto al principio del capítulo para las potencias racionales.

Ejemplo 19

a) $(\sqrt{3})^4 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \sqrt{3^4} = 3^2 = 9$;

b) $(\sqrt[3]{2})^{-2} = \sqrt[3]{2^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$.

Ejercicio 22

Calcúlese:

a) $(\sqrt[3]{a})^4$; *b)* $(\sqrt[4]{32})^{-2}$; *c)* $\left(\sqrt[3]{\frac{8}{27}}\right)^{-1}$

12. POTENCIACION DE EXPONENTE RACIONAL

En cursos anteriores se ha definido la potenciación de exponente entero, positivo o negativo, como extensión de la potenciación de exponente natural. Si definimos ahora

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$$

extendemos la operación de potenciación al caso de que el exponente sea un número racional cualquiera.

Con esta definición se logra que se conserven las leyes formales del cálculo con potencias, como:

1) Para multiplicar potencias de igual base se eleva dicha base a la suma de los exponentes.
2) Para dividir potencias de igual base se eleva dicha base a la diferencia de los exponentes de dividendo y divisor.
3) Para elevar un producto a una potencia se eleva a dicha potencia cada uno de los factores.
4) Para elevar una potencia a otra se eleva la base al producto de los exponentes.

Ejercicio 23

Exprésense como radicales las siguientes potencias:

$$2^{3/4} \quad ; \quad (-2)^{4/3} \quad ; \quad 125^{1/3}.$$

Exprésense los siguientes radicales como potencias de exponente fraccionario:

$$\sqrt[3]{81} \quad ; \quad \sqrt{12^3} \quad ; \quad \sqrt[4]{5^2} \quad ; \quad \sqrt[3]{\frac{1}{5}}$$

Ejercicio 24

Compruébese que al multiplicar $a^{p/q}$ por $a^{r/s}$ como radicales se obtiene el mismo resultado que dejando la misma base y sumando los exponentes, pues si esto no ocurriera, nuestra definición de potencia de exponente racional no sería consistente con la regla formal 1.

Ejercicio 25

Compruébense con ejemplos el resto de las leyes formales.

13. SIMPLIFICACION DE UN RADICAL. RADICALES SEMEJANTES

Consideremos el radical

$$\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^4}.$$

Si lo expresamos en la forma de potencia de exponente racional queda

$$\sqrt[3]{3^4} = 3^{4/3} = 3^{1+1/3} = 3 \cdot 3^{1/3} = 3\sqrt[3]{3}.$$

Mediante este proceso se han extraído factores del radical. Empleado en sentido inverso, sirve para introducir factores en el mismo.

Ejemplo 20

Introdúzcanse los factores dentro del signo radical:

$$a \cdot \sqrt[4]{a} = a^1 \cdot a^{1/4} = a^{1+1/4} = a^{5/4} = \sqrt[4]{a^5}.$$

Ejercicio 26

Extráiganse factores fuera del signo radical: $\sqrt[4]{32}$.

Ejemplo 21

Simplifíquese el radical $\sqrt[3]{2\,592}$.

Se descompone el radicando en factores primos:

$$2\,592 = 2^5 \times 3^4 = 2^{3+2} \cdot 3^{3+1} = 2^3 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 3^1.$$

Entonces, el radical es:

$$\sqrt[3]{2\,592} = 2^1 \cdot 2^{2/3} \cdot 3^1 \cdot 3^{1/3} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{2^2 \cdot 3^1} = 6\sqrt[3]{12}.$$

Ejercicio 27

Simplifíquense, extrayendo factores fuera del signo radical:

$$\sqrt[3]{162\,000}.$$

Cuando al simplificar, como lo hemos hecho, varios radicales se obtienen expresiones cuyos factores irracionales tienen los mismos índices e idénticos radicandos, se dice que los radicales iniciales son *semejantes.*

Ejemplo 22

$\sqrt[3]{16}$ y $\sqrt[6]{2\,916}$ son semejantes. En efecto:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2} \\ \sqrt[6]{2\,916} = \sqrt[6]{3^6 \cdot 2^2} = 3\sqrt[6]{2^2} = 3\sqrt[3]{2}. \end{cases}$$

Ejercicio 28

Decir si son o no semejantes los radicales $\sqrt{8}$ *y* $\sqrt[4]{324}$.

A veces interesa conseguir expresiones cuyo denominador no tenga radicales. Resulta fácil conseguirlo con la técnica que se usa a continuación:

a) Si el denominador es monómico:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1 \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}} = \frac{1 \cdot \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^3}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}}{a}$$

b) Si el denominador es un binomio irracional cuadrático, basta multiplicar los dos términos de la fracción por el llamado «conjugado» del denominador. Como se hace seguidamente:

$$\frac{1}{a - \sqrt{b}} = \frac{1 \times (a + \sqrt{b})}{(a - \sqrt{b})(a + \sqrt{b})} = \frac{a + \sqrt{b}}{a^2 - b}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{1 \times (\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}.$$

14. EXTENSION RADICAL DE Q

Cerramos el capítulo incidiendo sobre una cuestión estructural.

Consideremos la reunión del conjunto de los racionales y el de los radicales, que denotaremos W, de modo que

$$\boxed{Q \subset W}$$

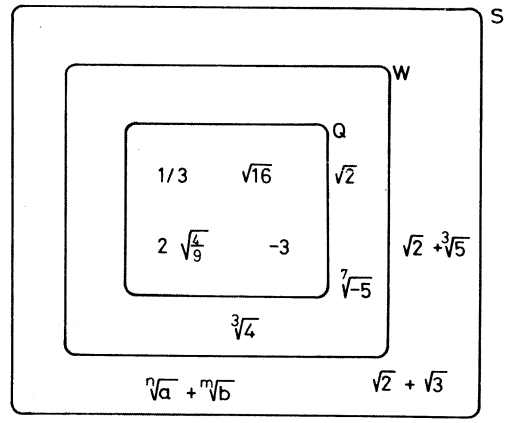


FIG. 3.10.

Nada se ha dicho de la adición de radicales, y es que la expresión, por ejemplo, $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$ no es un radical.

Planteemos también un nuevo conjunto S, que abarque también estas «sumas» de radicales

$$S \subset W$$

A este conjunto S, que incluye a los naturales, enteros, racionales, radicales y las «sumas» de éstos, se le denomina *extensión radical de Q*

$$N \subset Z \subset Q \subset W \subset S$$

Adviértase que S todavía no es R. Aún habrán de considerarse otros «números» que completen el conjunto de los reales. Pero esa es tarea de cursos superiores.

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 3.1

1. $(-1/2)^4=(1/2)^4=1/16$. No es inyectiva.

2. *a)* $(2/3)^4=16/81$;
b) $(1/2)^2=1/4$;
c) $(-2/3)^6=64/729$.

3. *a)* $(1/2)^{3-2}=1/2$;
b) $3^{4-(-1)}=3^5=243$.

4. *a)* $(-1/2)^{-6}=(-2)^6=64$;
b) $(-1/3)^2=1/9$.

5. $(2/3)^4 \times (2/3)^{-3} \times (2/3)^{-1} = (2/3)^{4-3-1} = (2/3)^0 = 1.$

6. *a)* $\dfrac{12}{125} = 0{,}096 = \dfrac{96}{1\,000}$;

b) $\dfrac{6}{16} = 0{,}375 = \dfrac{375}{1\,000}$;

c) $\dfrac{20}{6} = 3{,}\widehat{3}.$

7. Al operar $\sqrt{2}$, las primeras cifras son 1,41421356.

8. Sígase la técnica del ejemplo 6.

9. $2{,}\widehat{3} = 2 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{3}.$

Realícese sobre la «tercera unidad» la construcción de la figura 3.4.

10. Si $\sqrt{3} = p/q$ irreducible, resultaría $p^2 = 3q^2$, con lo que $p = \dot{3}$. Poniendo $p = 3r$, $p^2 = 9r^2 = 3q^2$; con lo que $3r^2 = q^2$ y $q = \dot{3}$. Así, p y q no pueden ser primos entre sí, en contra de la hipótesis de partida de que p/q era fracción irreducible.

11. $\dfrac{22}{7} \simeq 3{,}1428$; $\dfrac{1}{3} \simeq 0{,}3333$; $\sqrt{2} = 1{,}4142$;

$\pi = 3{,}1416$ (por exceso).

12. Véase el epígrafe 8.

13. No, pues si $1/a = p/q$, sería $a = q/p$, en contra de la naturaleza irracional de a.

14. Primera pregunta: no; segunda pregunta: puede serlo, ejemplo: $\pi + (2 - \pi) = 2$; y tanto π como $2 - \pi$ son irracionales.

15. -2; irracional; 6; irracional; 4.

16. Basta establecer la reflexividad, simetría y transitividad y operar los segundos miembros de las implicaciones.

17. $\sqrt[3]{2}$ y $\sqrt[6]{4}$; $\sqrt{8}$ y $\sqrt[4]{64}$; $\sqrt{8}$; $\sqrt{2}$.

18. $\sqrt{3}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt[4]{5}$.

19. $\sqrt[60]{2^{30}}$; $\sqrt[60]{3^{20}}$; $\sqrt[60]{5^{12}}$; $\sqrt[60]{4^{15}}$.

20. $\sqrt[12]{a^{16}b^{17}}$.

21. *a)* $\sqrt[6]{32}$; *b)* $\sqrt[12]{a^5/b^6}$.

22. *a)* $\sqrt[3]{a^4}$; *b)* $1/\sqrt[4]{2^{10}}$; *c)* 3/2.

23. $\sqrt[4]{2^3}$; $\sqrt[3]{(-2)^4} = \sqrt[3]{16}$; $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$.

24. Basta ceñirse a las indicaciones del enunciado.

25. Es suficiente manejar las operaciones de los exponentes racionales.

26. $\sqrt[4]{32} = 2\sqrt[4]{2}$.

27. $\sqrt[3]{162\,000} = 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{6}$.

28. Sí, son semejantes, pues: $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ y $\sqrt[4]{324} = 3\sqrt{2}$.

3.2

Funciones polinómicas de variable real. Representación gráfica

1. INTRODUCCION

La importancia de los polinomios radica en que mediante ellos es posible construir aplicaciones, no triviales *, de un anillo o un cuerpo en otro.

Concretamente, sea Z el anillo de los números enteros y tomemos un polinomio cualquiera $P(x)$ cuyos coeficientes sean enteros. Entonces es posible definir la aplicación de Z en Z dada así:

$$a \longrightarrow P(a)$$

a es un número entero, elemento de Z, y a cada a se le asocia el valor que toma el polinomio $P(x)$ cuando se sustituye x por a. Como las únicas operaciones que se realizan para calcular $P(a)$ son sumas y productos de números enteros, el resultado es ciertamente un número entero, así que la aplicación está bien definida. Todo elemento de Z tiene una imagen.

Ejercicio 29

Hállese la imagen de cada uno de los siguientes números en la aplicación de Z en Z definida por el polinomio x^3-3x-5.

$$-2;\quad 1;\quad 6;\quad 3.$$

Ejercicio 30

El polinomio $x^2-\frac{3x}{4}+2$, ¿define una aplicación de Z en Z?

---

* Triviales = elementales, sencillas, sin importancia.

De manera totalmente análoga, es posible establecer, con ayuda de un polinomio, aplicaciones de Q en Q o de R en R (también de Q en R; ejemplo: basta tomar el polinomio $x+\sqrt{2}$).

Función polinómica de variable real es una aplicación de R en R, tal que a cada real le hace corresponder, como imagen, el valor numérico que un determinado polinomio toma para ese real. Es decir:

$$R \xrightarrow{f} R$$
$$a \longrightarrow f(a), \quad f(x) \in R[x]$$

En las funciones polinómicas más importantes que ahora veremos se encontrarán funciones ya conocidas de Q en Q, prolongadas ahora a R, es decir, permitiendo a la variable tomar valores tanto racionales como irracionales.

2. FUNCION LINEAL Y FUNCION AFIN

Los casos más sencillos de funciones polinómicas, pero de los más importantes, los proporciona el polinomio $(b, a, 0, 0, \ldots)$; es decir, se trata de la función

$$x \longrightarrow ax+b,$$

que recibe el nombre de *función afín.*

Si $b=0$, entonces la función afín $f(x)=ax+b$ se transforma en

$$x \longrightarrow ax,$$

que es la llamada *función lineal.*

Sus gráficas, paralelas, pueden observarse en la figura 3.11.

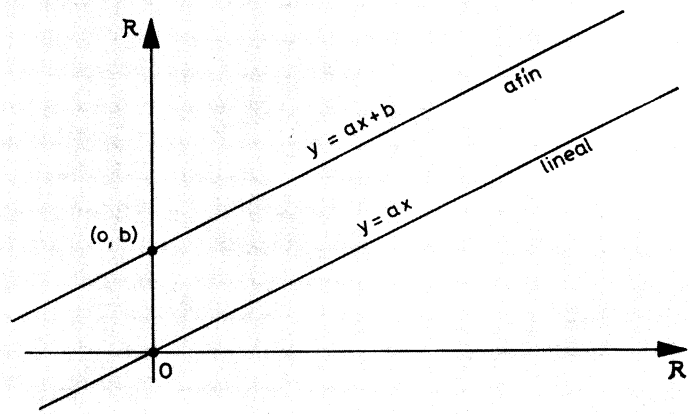


FIG. 3.11.

La gráfica de la función afín se obtiene inmediatamente a partir de la de la función lineal correspondiente. Basta observar que el valor de la función afín correspondiente a un valor de x se obtiene sumando la cantidad constante b al valor de la lineal en el mismo punto. Por tanto, trasladando la gráfica de la función $y=ax$ paralelamente a sí misma, hasta que pase por el punto $(0, b)$, se obtiene la gráfica buscada.

Ejercicio 31

En una función lineal de R en R la imagen de π es $\sqrt{2}$. ¿Cuál será la imagen de 3? ¿Y la de $-1/5$?

3. ELEMENTOS DE UNA FUNCION POLINOMICA

En toda función polinómica han de considerarse tres elementos:

— el dominio de la variable;
— el recorrido de la función;
— el polinomio-criterio de la aplicación.

Dominio de la variable es el conjunto numérico en el que toma valores la variable.

Ejemplo 23

La función $f: Q \to R$, $f(x)=x+2$ tiene por dominio el conjunto de los racionales Q. Así es que, por ejemplo, $f(-2/3)$ tiene sentido en esta función y $f(\sqrt{2})$, no.

Recorrido de la función, también llamado «co-dominio», es el conjunto de imágenes.

Ejemplo 24

La función $f: R \to R$, $f(x)=x^2+1$ tiene por recorrido o codominio el subconjunto real R^+, $[0, \infty)$.

El polinomio-criterio es el polinomio cuyos valores numéricos dan los valores de la función.

Ejemplo 25

La función $f: R \to R$, $f(x)=x^2-3x+2$ tiene por criterio el polinomio

$$f=(2, -3, 1, 0, 0, \ldots).$$

Ejercicio 32

Establézcase el dominio, recorrido y polinomio-criterio de la función de Z en Q

$$y=\frac{1}{3}x^2.$$

4. APLICACIONES Y FUNCIONES

Es muy conveniente que queden claras la analogías y diferencias que hay entre los conceptos de aplicación y función.

También es muy útil manejar indistintamente la terminología de ambos campos, sabiendo cuándo las palabras significan lo mismo (sinónimos).

Disponemos paralelamente las definiciones simbólicas de aplicación y función para resaltar su diferencia.

$$\left.\begin{array}{l} f:A\to B \text{ es} \\ \text{aplicación} \end{array}\right\} \iff \forall x\in A,\quad \exists^* y\in B/y=f(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} f:A\to B \text{ es} \\ \text{función} \end{array}\right\} \iff \forall x\in A,\quad \exists y\in B/y=f(x)$$

He aquí la diferencia:

aplicación: cada x tiene una sola imagen;
función: cada x puede tener más de una imagen.

Para hacer esta distinción, existen dos adjetivos para las funciones:

Función { uniforme = APLICACION
multiforme = NO APLICACION

ADVERTENCIA: Conviene saber que otros libros consideran que las funciones multiformes no son funciones. Para estos autores, los conceptos de *función* y *aplicación* coinciden; y a las funciones uniformes las llaman, simplemente, «funciones». Para otros autores —los más— *función* es sinónimo de aplicación que puede o no estar definida en todo el conjunto inicial *.

---

* Sin embargo, entendemos que lo que se sacrifica del modo tradicional de clasificación se gana, con mucho, en la primera didáctica de estas cuestiones.

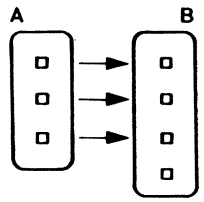
Téngase en cuenta, por otra parte, que cuando se tiene una función, definida al modo usual —que en el libro queda clasificada como no función— cuyo conjunto inicial no coincide con el original, basta restringir la definición a su dominio para que caiga, del todo, dentro de nuestro establecimiento.

Digamos también que se llama **unívoca** a la función uniforme que se corresponde con el concepto de aplicación inyectiva.

Ejemplo 26

Funciones unívocas: cada imagen lo es de un solo antecedente.

Aplicación inyectiva



Función uniforme unívoca

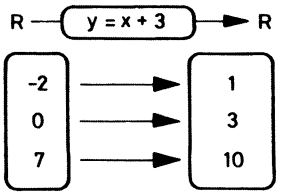
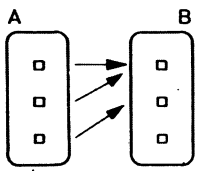


FIG. 3.12.

Ejemplo 27

Funciones no unívocas: tienen imágenes con más de un antecedente.

Aplicación no inyectiva



Función uniforme no unívoca

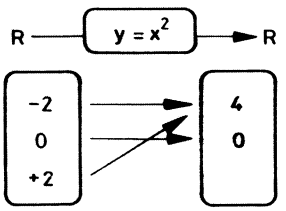


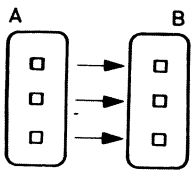
FIG. 3.13.

Finalmente, entiéndase que cuando se habla de una función uniforme **biunívoca** se esta haciendo referencia al mismo concepto de aplicación bivectiva.

Ejemplo 28

Función uniforme biunívoca: es unívoca y exhaustiva.

Biyección



Función uniforme biunívoca

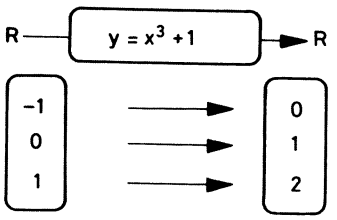


FIG. 3.14.

Lo que se lleva dicho se facilita sinópticamente en el cuadro de la figura 3.15.

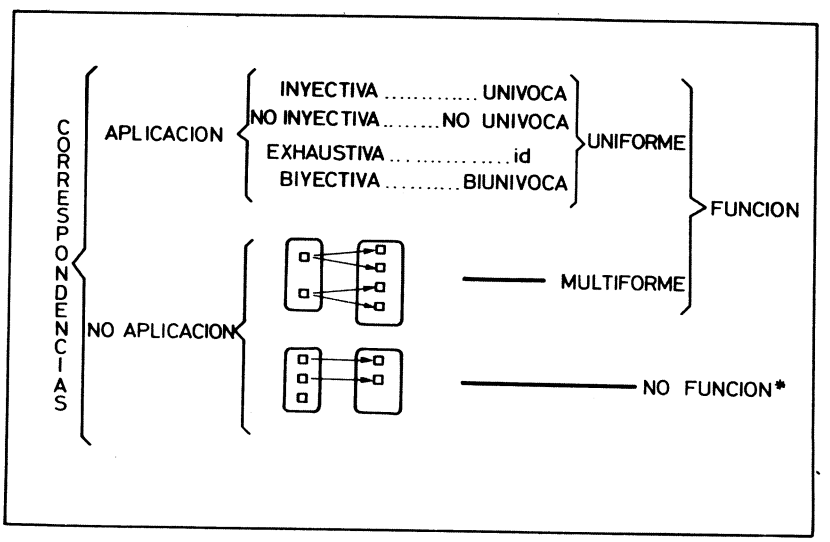


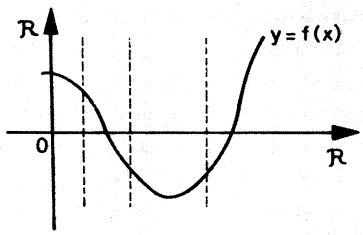
FIG. 3.15. *Correspondencias y aplicaciones-funciones.*

* Véase nota anterior.

¿Hay alguna manera rápida de saber, sobre las gráficas de las funciones, de qué clase son?

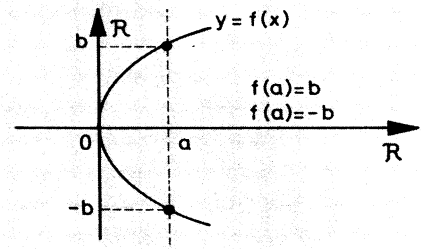
Sí, del modo sencillo que se indica:

Función uniforme



Al trazar cualquier paralela al eje de ordenadas, sólo corta en un punto a la gráfica.

Función multiforme

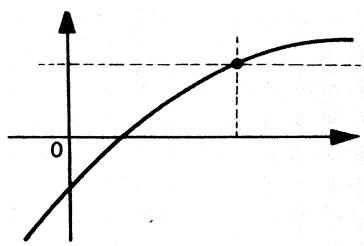


Es posible trazar una paralela al eje de ordenadas que corte a la gráfica en más de un punto.

FIG. 3.16.

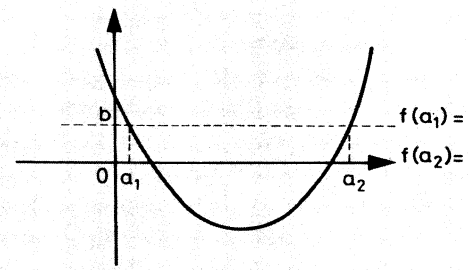
Todas las funciones polinómicas son uniformes

Función uniforme unívoca



Al trazar una paralela al eje de abscisas, sólo corta a la gráfica en un punto.

Función uniforme no unívoca



Se puede trazar una paralela al eje de abscisas que corte a la gráfica en más de un punto.

FIG. 3.17.

Ejercicio 33

Determínese el valor que la función $y=\sqrt{x+1}$ *da para* $x=8$. *Luego, decídase si es o no función uniforme.*

Ejercicio 34

Dibújese la gráfica de la función afín $f(x)=x+2$. *Trácense paralelas al eje de ordenadas; ¿es uniforme? Trácense paralelas al eje de abscisas; ¿es unívoca?*

Ejercicio 35

Para la función del ejercicio 34, *establecida de R en R, ¿es cierto que cualquier real es imagen de algún x? Conteste, y a la vista de ello, califique la función. Después, con ese resultado y el conseguido en el ejercicio* 34, *decida de qué clase de función se trata.*

Ejercicio 36

Como hacía en cursos anteriores, dibuje una parábola de eje paralelo al de ordenadas. Luego diga qué clase de función representa.

5. FUNCION CONSTANTE. FUNCION IDENTICA. PRODUCTO DE FUNCIONES. FUNCIONES LINEALES INVERSAS

Función constante

Ejemplo 29

Sea la función $f: R \to R$, definida por el polinomio $(k, 0, 0, \ldots)$; es decir:

$$x \to 0x + k$$

o en su clásica forma cartesiana

$$y = k.$$

Una función que, como la establecida, toma el mismo valor para cualquiera de su variable, recibe el nombre de «función constante».

En la figura 3.18 se representan las gráficas de las funciones constantes que se anotan. Adviértase que son siempre rectas paralelas al eje de abscisas.

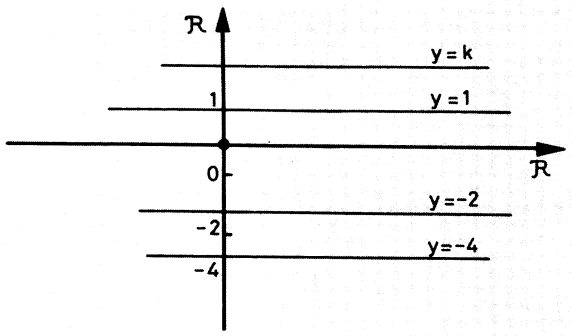


FIG. 3.18.

Ejercicio 37

Dibújese la gráfica de la función constante $y=-3$. Luego trácese la bisectriz del primero y tercer cuadrantes. Finalmente, dibújese la recta simétrica a la gráfica anterior, respecto de esa bisectriz. Dígase cuál es la función que representa la última recta dibujada.

Función idéntica

La función $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}: I(x)$ es **función idéntica** $\Leftrightarrow \forall x \in R,\ I(x)=x$

lo que significa: Función idéntica es la que hace corresponder cada valor de la variable a sí mismo

$$y=x.$$

Ejemplo 30

x	-3	-1	0	1	2	3
y	-3	-1	0	1	2	3

Es claro que se trata de una función lineal. La gráfica es la bisectriz del primero y tercer cuadrantes.

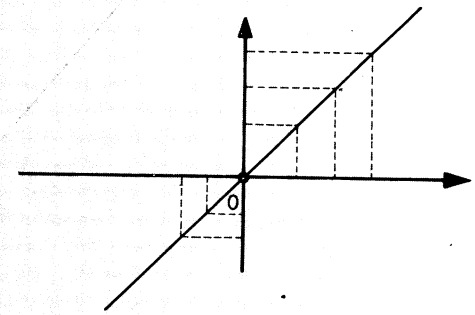


FIG. 3.19.

Composición de funciones. Función producto

Sea la función

$$f: R \to R, \quad f(x) = x - 1 \quad \text{y la} \quad g: R \to R, \quad g(x) = x^2.$$

Hagamos actuar primero a f y luego, sobre su recorrido, a g, como si fuera su dominio

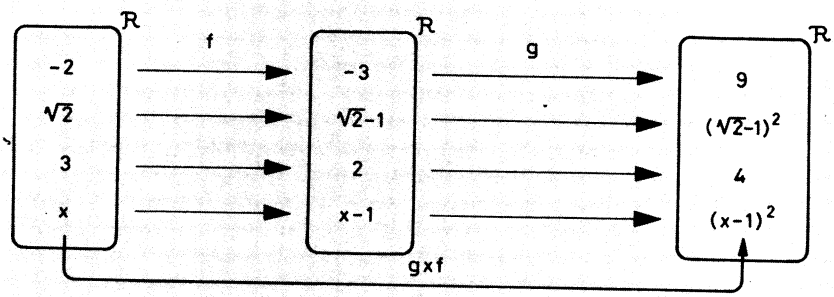


FIG. 3.20.

De este modo, siempre que es posible, se obtiene una función, llamada *función-producto,* cuyo dominio es el de la primera, el recorrido es el de la segunda y su criterio actúa «de una vez» como si actuara primero f y luego g:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & f(a) = b \\ \text{II} & g(b) = c \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\text{Sustituyendo I en II}} \\ \multicolumn{2}{c}{g[f(a)] = c} \end{array}$$

Se acostumbra a simbolizarlo $g \times f$, aunque se debe leer «efe por ge»

$$g \times f(a) = c.$$

La razón de escribir «al revés» las dos letras la da el orden de actuación de las funciones: primero actúa f y luego g.

Ejercicio 38

Determínense, con las funciones antes establecidas, $f(4)$ y luego, $g[f(4)]$. También calcúlese directamente $g \times f(4)$. Véase si coinciden ambos resultados.

No se puede cambiar el orden de composición de dos funciones, pues, en general,

El producto de funciones no es conmutativo

$$g \times f \neq f \times g$$

Ejemplo 31

Sean estas dos funciones polinómicas de variable real:

$$f: x + 2$$
$$g: x^2$$

Se aplica f al real 3:

$$f(3) = 5$$

y ahora se aplica g al recién hallado $f(3)$:

$$g(5) = 25$$

Se aplica g al real 3:

$$g(3) = 9$$

y ahora se aplica f al recién hallado $g(3)$:

$$f(9) = 11$$

$$25 \neq 11$$
$$g \times f(3) \neq f \times g(3).$$

Ejercicio 39

Dadas las funciones de R en R $f: x^2 + 1$ y $g: x/2$, establézcanse los criterios de los productos $g \times f$ y $f \times g$.

Funciones inversas

Dos funciones cuyo producto es la función idéntica son funciones inversas. A la función inversa de $f(x)$ se la suele representar por $f^{-1}(x)$, de modo que

$$f^{-1}(x) \cdot f(x) = f(x) \cdot f^{-1}(x) = I(x)$$

Ejemplo 32

¿Cuál es la función inversa de la lineal $f(x)=2x+3$?

a) Despejemos la variable:

$$y=2x-3; \qquad x=\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}$$

b) Obtenemos una función en la que la variable es la y. Conviene cambiar las letras a las que estamos acostumbrados a ver; de modo que

$$g(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$$

c) Compongamos las dos funciones:

$$\begin{array}{r} f(x)= 2\ x+3 \\ g(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2} \\ \hline g\times f(x)=2\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)+3 \\ g\times f(x)=x \end{array}$$

o en la forma usual:

$$y=x$$

El producto de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ ha dado la función idéntica, luego $g(x)$ y $f(x)$ son inversas.

Ejercicio 40

Establézcase la función inversa de la

$$f(x)=\frac{x-3}{2}$$

Ejemplo 33

Vamos a representar las funciones inversas $f(x)$ y $g(x)$ del ejemplo 32.

x	-2	0	1	2
$f(x)$	-1	3	5	7

x	-3	-1	3	5
$g(x)$	-3	-2	0	1

Se observa que las gráficas son simétricas, respecto de la primera bisectriz.

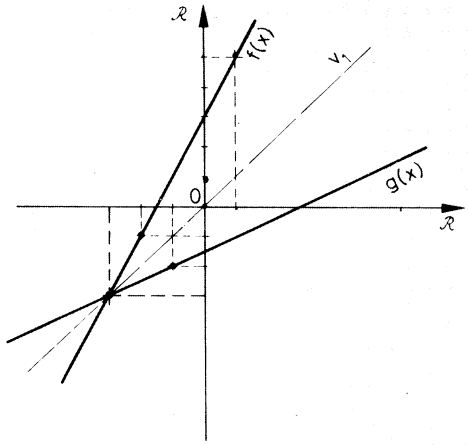


FIG. 3.21.

Este resultado es completamente general

> Las gráficas de dos funciones inversas son simétricas, respecto de la primera bisectriz.

Ejercicio 41

Calcúlense y dibújense las gráficas de las funciones inversas de las siguientes lineales.

a) $y=3x-1/2$; *b)* $y=3$; *c)* $x=4$.

6. FUNCION CUADRATICA $y=x^2$

Al ser $x^2 \geqslant 0$ cualquiera que sea x, los puntos de la gráfica se encontrarán todos en el semiplano situado por encima del eje de abscisas.

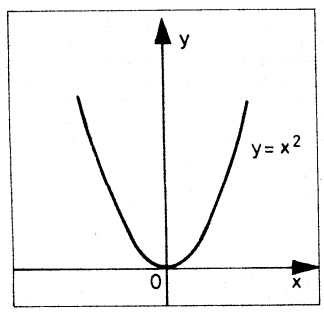


FIG. 3.22.

Busquemos algunos puntos de la gráfica

x	y
0	0
1	1
-1	1
2	4
-2	4
1/2	1/4

Como se ve, valores opuestos de x dan el mismo valor para y, ya que

$$(-x)^2 = x^2.$$

La gráfica resulta ser simétrica respecto del eje de ordenadas. La curva que se obtiene se llama «parábola».

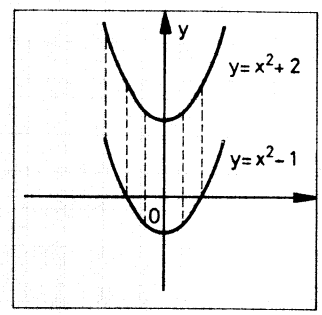


FIG. 3.23.

Cuando en lugar de considerar la función $y = x^2$ se considera la

$$y = x^2 + c$$

la gráfica se obtiene inmediatamente a partir de la anterior sin más que efectuar una traslación en la dirección del eje OY, y en un sentido u otro según sea el signo de c. En la figura se representan las gráficas de las funciones

$$y = x^2 + 3$$
$$y = x^2 - 1.$$

Mientras que la primera continúa estando en el semiplano situado por encima del eje OX, la segunda gráfica corta al eje OX en los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$ y en el intervalo $(-1, 1)$ la función cuadrática tiene signo negativo.

7. FUNCION $y=ax^2$

Dibujada la gráfica de la función $y=x^2$, la de $y=ax^2$ se obtiene rápidamente sin más que multiplicar cada una de las ordenadas por el número a. En principio cabe distinguir el caso $a>0$ del $a<0$.

Si $a>0$, la gráfica permanece en el semiplano situado por encima del eje OX. En cambio, si $a<0$ todas las ordenadas son negativas, y la curva representativa se halla situada en el semiplano opuesto. En la figura se han representado los dos casos.

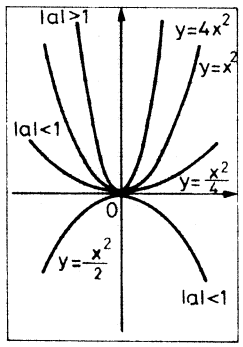


FIG. 3.24.

Además del signo de a conviene tener en cuenta su valor absoluto. Si el valor absoluto es mayor que 1, las ordenadas son, en valor absoluto, mayores que las correspondientes a igual valor de x en la gráfica de $y=x^2$, y la curva parece ser más cerrada que la representativa de $y=x^2$. Lo contrario ocurre si a es en valor absoluto menor que 1.

La función $y=ax^2+c$ se representa desplazando la gráfica de $y=ax^2$ paralelamente al eje OY en un sentido u otro, según sea el valor de c.

Ejercicio 42

Represéntese gráficamente la función

$$y=-\frac{x^2}{3}+3.$$

Ejercicio 43

Dibújense las gráficas de las siguientes funciones

$$a)\quad y=-x^2+1; \qquad b)\quad y=\frac{x^2}{4}+1.$$

8. TRINOMIO DE SEGUNDO GRADO. REPRESENTACION GRAFICA

La función cuadrática general

$$x \longrightarrow y = ax^2 + bx + c$$

suele llamarse «función trinomio de segundo grado», por venir definida por un polinomio completo (tres términos, de ahí lo de trinomio) de segundo grado.

Antes de proceder a su representación gráfica consideremos un caso muy simple de función cuadrática con los tres términos.

Sea la función

$$x \longrightarrow y = x^2 + 4x + 4.$$

Observando que $x^2 + 4x + 4$ es el cuadrado de $x + 2$, la aplicación anterior se escribe

$$x \longrightarrow y = (x + 2)^2.$$

Si a $x + 2$ se le llama u y se representa la función

$$y = u^2$$

bastará luego trasladar la gráfica obtenida dos unidades hacia la izquierda, de acuerdo con el hecho de ser

$$x = u - 2$$

para obtener la gráfica de $y = (x + 2)^2$.

En la figura 3.25 está representada la misma.

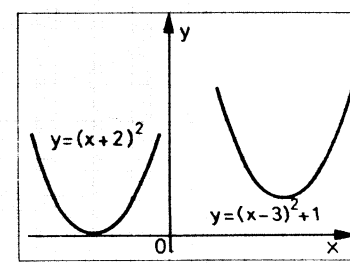


FIG. 3.25.

Ejercicio 44

Supuesta dibujada la gráfica de $y = x^2$, ¿en qué sentido y cuántas unidades habrá que trasladarla para obtener la gráfica de $y = (x - 1/2)^2$?

Ejemplo 34

Para representar gráficamente $y=(x-3)^2+1$ comenzaremos representando

$$y=x^2.$$

A continuación efectuaremos una traslación de tres unidades en dirección del eje OX y sentido positivo. La gráfica resultante será la de

$$y=(x-3)^2.$$

Por último, basta con trasladar esta última gráfica una unidad en la dirección del eje OY, y sentido positivo (hacia arriba), para obtener la gráfica de la función dada.

Ejercicio 45

Represéntese gráficamente la función cuadrática:

$$y=-\tfrac{1}{2}(x+1)^2+2.$$

Como se ve en el ejemplo 34, la facilidad para la representación gráfica viene de la forma en que está escrito el trinomio, como suma de tan sólo dos términos. A continuación se verá que todo trinomio puede escribirse así.

Considérese el trinomio

$$y=ax^2+bx+c$$

que se puede escribir

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c. \qquad [1]$$

Los dos primeros términos del desarrollo de $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ coinciden en los sumandos del paréntesis en [1], pues

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}.$$

Despejando de aquí $x^2+\frac{b}{a}x$, y sustituyendo en [1] queda finalmente,

$$\boxed{y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}} \qquad [2]$$

La expresión [2] se llama *forma normal* del trinomio $y=ax^2+bx+c$.

Ejemplo 35

La forma normal del trinomio $x^2-6x+10=y$ es $y=(x-3)^2+1$.

Ejemplo 36

La forma normal de $y = -x^2 + 4x - 2$ es $y = -(x-2)^2 + 2$.

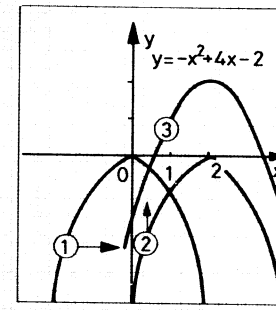


FIG. 3.26.

Representando $y = -u^2$, trasladando luego la gráfica obtenida dos unidades en sentido positivo en la dirección de OX y, por último, trasladando esta segunda gráfica otras dos unidades en el sentido positivo de la dirección del eje OY, se obtiene la representación de la función cuadrática dada.

Ejercicio 46

Hállese la forma normal del trinomio de segundo grado

$$y = \frac{x^2}{3} + 2x - 5$$

y efectúese su representación gráfica.

Ejercicio 47

Procédase igual, con el trinomio

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{2}{3}.$$

Al número $b^2 - 4ac$ se le llama «*discriminante*» del trinomio, y de ahora en adelante lo representaremos por Δ. La forma normal queda, pues,

$$\boxed{y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}} \qquad [2']$$

9. SIGNO DEL TRINOMIO DE SEGUNDO GRADO

Dado un trinomio de segundo grado $y=ax^2+bx+c$, escribámoslo en la forma normal, sacando factor común a

$$y=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right] \qquad [2'']$$

Veamos qué signo toma y, en función de dos factores:

— el signo de a;
— el signo del discriminante Δ.

Caso 1.º: $\Delta<0$

En este caso, la expresión del corchete de [2''] es siempre positiva. Por ello,

el trinomio y toma el mismo signo que a

Ejemplo 37

a) El trinomio $y=x^2+x+1$ tiene de discriminante $\Delta=b^2-4ac=1-4=-3$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta<0\\ a>0\end{array}\right\} \Longrightarrow y>0$$

b) El trinomio $y=-x^2-x-3$ tiene de discriminante $\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-$ $-4(-1)(-3)=-11$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta<0\\ a<0\end{array}\right\} \Longrightarrow y<0$$

Caso 2.º: $\Delta=0$

En este caso, la expresión del corchete de [2''] es siempre positiva, excepto cuando $x=-b/2a$, que se anula. Entonces,

El trinomio y toma el mismo signo que a, excepto para $x=-b/2a$, que se anula.

Ejemplo 38

El trinomio $y=x^2-6x+9$ tiene de discriminante $\Delta=b^2-4ac=36-36=0$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta=0\\ a>0\end{array}\right\} \Longrightarrow y>0,$$

excepto para $x=3$, en el que $y=0$.

Caso 3.º: $\Delta > 0$

Cuando ocurre esto, la expresión del corchete de [2''] no conserva signo constante. Veamos cómo varía, introduciendo en dicha expresión $\sqrt{\Delta}$. Escribimos:

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(\sqrt{\Delta})^2}{(2a)^2}\right] \qquad [3]$$

La [3] tiene sentido, pues al ser $\Delta > 0$, existe su raíz cuadrada.

Al escribir de la forma anterior la expresión [3], se percibe que es una diferencia de cuadrados, pudiendo descomponerse en producto así:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \qquad [4]$$

Llamemos

$$x_1 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Entonces, la expresión [4] toma la forma

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = (x - x_1) \cdot (x - x_2). \qquad [4']$$

En definitiva, el trinomio de segundo grado, en el caso que estamos estudiando, ha tomado la forma

$$y = a(x - x_1) \cdot (x - x_2). \qquad [5]$$

Los valores x_1 y x_2 hacen que el trinomio se anule.

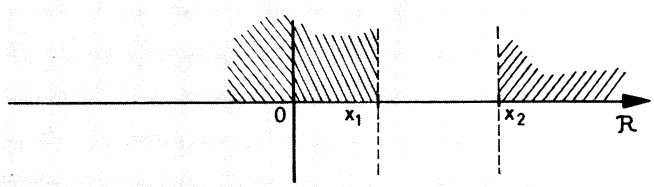


FIG. 3.27.

Para continuar la discusión de este caso supongamos, por ejemplo, que x_1 es menor que x_2.

Para un $x < x_1$, los dos factores de [5] son negativos; su producto, positivo.

Para un valor de $x > x_2$, los dos factores de [5] son positivos, y su producto, positivo. Lo cual permite escribir:

El trinomio y toma el mismo signo que a para valores de x, pertenecientes a $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$.

Para un x perteneciente al intervalo (x_1, x_2), los dos factores de [5] toman distinto signo, su producto es negativo y el trinomio tiene distinto signo de a; es decir,

El trinomio y toma distinto signo que a para valores de x pertenecientes a (x_1, x_2).

Finalmente, si x toma uno de los valores x_1 o x_2 (denominados *raíces del trinomio),* entonces y se anula.

Reuniendo en un cuadro único los resultados del análisis realizado para este tercer caso, se escribe:

- El trinomio y tiene el mismo signo que a, para $x < x_1$ o $x > x_2$.
- El trinomio y se anula para $x = x_1$ o $x = x_2$.
- El trinomio y tiene distinto signo que a para $x_1 < x < x_2$.

Ejemplo 39

El trinomio $y = -2x^2 + 7x - 3$ tiene por discriminante

$$\Delta = 7^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-3) = 49 - 24 = 25 > 0.$$

Por tanto, no conserva signo constante. Las raíces son

$$x_1 = -\frac{7}{-4} - \frac{\sqrt{25}}{-4}; \qquad x_2 = -\frac{7}{-4} + \frac{\sqrt{25}}{-4},$$

esto es:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

Entonces,

$$\left.\begin{matrix}\Delta > 0 \\ a < 0\end{matrix}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} \left.\begin{matrix} x < \frac{1}{2} \\ x > 3 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow y < 0 \quad \text{(igual signo que } a\text{)} \\ \left.\begin{matrix} x = \frac{1}{2} \\ x = 3 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow y = 0 \\ \frac{1}{2} < x < 3 \Longrightarrow y > 0 \quad \text{(signo contrario de } a\text{)} \end{cases}$$

Ejercicio 48

Investíguese el signo del trinomio $y=2x^2-5x+4$.

Ejercicio 49

¿Es siempre negativo el trinomio $y=-3x^2+12x-12$?

Ejercicio 50

Estúdiese el signo del trinomio, haciendo su gráfica, $y=x^2-x-6$.

10. VALORES EXTREMOS DE UN TRINOMIO DE SEGUNDO GRADO

Escrito el trinomio en la forma

$$y=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right],$$

se puede observar que el valor mínimo del corchete se alcanza cuando $x=-b/2a$, pues, en este caso, el primer sumando, que es siempre positivo o nulo, toma su valor mínimo.

Si $a>0$, ese valor mínimo del corchete produce el menor valor para el trinomio.

Si $a<0$, entonces el valor mínimo conseguido para el corchete, produce el mayor valor posible del trinomio.

Ejemplo 40

Determínese el valor mínimo del trinomio $y=x^2-4x+3$

$$x_{\text{mín}}=-b/2a=4/2=2$$
$$f(2)=-1$$

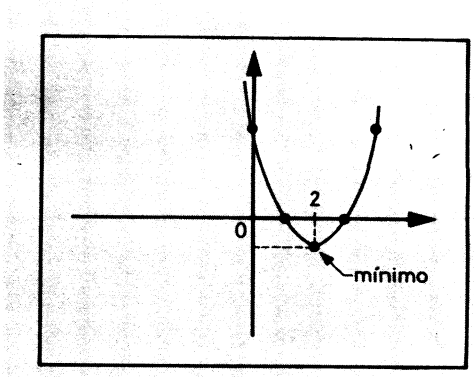


FIG. 3.28.

Como puede observarse en la gráfica de la figura 3.28, se trata de la ordenada más pequeña de su representación.

Ejemplo 41

Determínese el valor máximo del trinomio $y = -x^2 + 6x - 8$

$$x_{máx} = -b/2a = 3$$
$$f(3) = 1$$

La gráfica de la figura 3.29 da, para $x = 3$, la ordenada máxima.

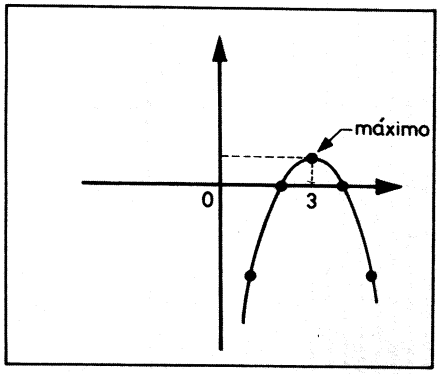


FIG. 3.29.

Ejercicio 51

Calcúlense los máximos o los mínimos de los trinomios que se facilitan, dibujando también sus gráficas.

a) $y = x^2 - 1$; *b)* $y = -x^2 + 4x$.

11. FUNCIONES POLINOMICAS DE GRADO MAYOR QUE DOS

Así como han resultado posibles el estudio detallado y la representación gráfica de las funciones polinómicas definidas por polinomios de primero y segundo grados, los métodos disponibles en este curso no permiten emprender el problema de la representación gráfica de funciones polinómicas de grado superior, salvo en casos muy concretos, el más importante de los cuales lo constituyen las funciones definidas por monomios de grado n de la forma

$$x \longrightarrow y = ax^n.$$

Para este tipo de funciones, conviene distinguir los casos en que el exponente n sea par o impar.

Si n es par, la función mantiene el signo de a; es nula para $x=0$, y su gráfica es simétrica respecto del eje de ordenadas.

Ejemplo 42

En la figura 3.30 se representa la gráfica de la función $y=\frac{1}{4}x^4$.

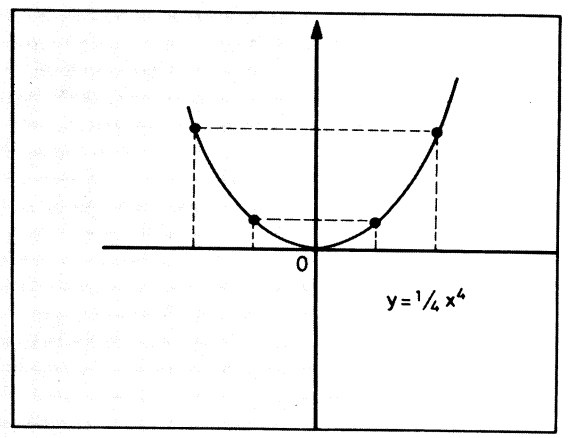


FIG. 3.30.

Si n es impar, la función toma valores negativos y positivos, coincidiendo con el signo de x, si $a>0$, o teniéndolo contrario, si $a<0$.

La propiedad fundamental de este tipo de funciones de n impar es que la aplicación

$$x \longrightarrow y=ax^n$$

es inyectiva, es decir, se trata de una función unívoca. Como, además, recubre todo el conjunto de los reales, es exhaustiva; en fin, se trata de una función biunívoca.

Ejemplo 43

En la figura 3.31 se representa la gráfica de la función $y=x^3$, llamada por algunos «la parábola cúbica».

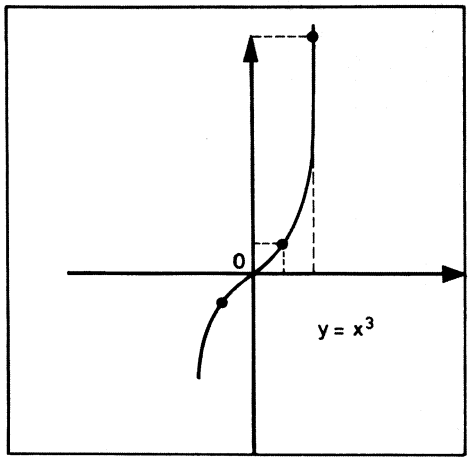


FIG. 3.31.

Ejercicio 52

Represéntese la función $y=\frac{1}{2}x^4$; *y también la* $y=\frac{1}{4}x^3$.

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 3.2

29. *a)* -7; *b)* -7; *c)* 193; *d)* 13.

30. No, la imagen de 1, por ejemplo, es 9/4, que no es elemento de Z.

31. La imagen de 3 es $3\sqrt{2}/\pi$; la de $-1/5$ es $-\sqrt{2}/5\pi$.

32. Dominio es Z; recorrido es $Q^+ \in Q$; polinomio-criterio es $(0, 0, 1/3, 0, 0, \ldots)$.

33. $f(8)=3$; es uniforme.

34. La función afín $f(x)=x+2$ es uniforme unívoca.

35. Sí, todo real es imagen de algún x, lo que significa que la función es exhaustiva. Como, además, es unívoca, se trata de una función biunívoca.

36. Consúltese la figura 3.25.

37. La recta simétrica representa la función $x=-3$.

38. $y=(x-1)^2$; $g \times f(4)=9$;
$f(4)=4-1=3$; $g(3)=9$;

39. $g \times f=\frac{x^2+1}{2}$; $f \times g=\frac{x^2+4}{4}$.

40. $f^{-1}(x) = 2x + 3$.

41. *a)* $y = \dfrac{2x+1}{6}$; *b)* $x = 3$; *c)* $y = 4$.

42. Véanse las figuras del capítulo 3.2.

43. *a)* Es la gráfica simétrica respecto de OX, de la inferior de la figura 3.23.

b) Corresponde a la que resulta si se traslada en sentido positivo de las ordenadas, la dibujada en la figura 3.24.

44. 0,5 unidades, en sentido positivo, paralelamente a OX.

45. Sígase la técnica descrita.

46. $y = \dfrac{1}{3}(x+3)^2 - 8$.

47. $y = -\dfrac{1}{2}(x-3)^2 + 23/6$.

48. Siempre positivo.

49. Siempre negativo, excepto para $x = 2$, que vale cero.

50. $x_1 = -2$; $x_2 = 3$; $y > 0$ para $x < -2$ o $x > 3$.
$y = 0$ para $x = -2$ y $x = 3$.
$y < 0$ para $-2 < x < 3$.

51. *a)* Mínimo $(0, -1)$; *b)* Máximo $(2, 4)$.

52. Véase la técnica en las figuras 3.30 y 3.31.

3.3

Ecuaciones

1. ECUACIONES

Aunque suene a cosa sabida, conviene precisar el concepto de ecuación.

Considérense dos conjuntos A y B cualesquiera, y sea f una aplicación de A en B. Dado un elemento $a \in A$, se sabe hallar la imagen $f(a) \in B$.

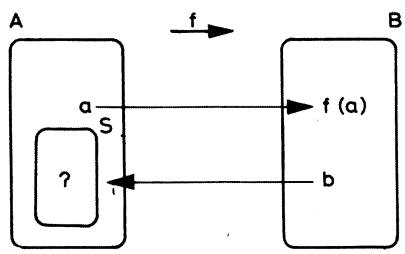


FIG. 3.32.

Es posible plantear ahora el problema inverso: Dado un elemento $b \in B$, existe un subconjunto S de A (que puede ser vacío) formado por todos aquellos elementos de A cuya imagen por f es b

$$S = \{x \in A / f(x) = b\}.$$

DEFINICIÓN: Resolver la ecuación $f(x) = b$ consiste en definir el conjunto S (que se llama conjunto de soluciones), explicitando sus elementos.

Ejemplo 44

Con la aplicación de Q en Q definida por

$$x \xrightarrow{f} x^2$$

(a cada número racional x se le hace corresponder su cuadrado)

se puede considerar la ecuación $x^2=36$. Resolverla supone encontrar los números racionales cuya imagen por f es 36. Fácilmente se ve que sólo existen dos, 6 y -6, por lo que

$$S=\{6, -6\}.$$

Ejemplo 45

Con la misma aplicación anterior, considérese la ecuación

$$x^2=2.$$

Ahora, el conjunto S es el conjunto vacío, pues no existe elemento de Q cuyo cuadrado sea 2. Sin embargo, la misma aplicación, pero de R en R, permite plantear la ecuación

$$x^2=2,$$

cuyo conjunto de soluciones S es, ahora,

$$\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}.$$

Este ejemplo pone de manifiesto que en una ecuación hay que tener presente tanto como la «forma particular de f» los dos conjuntos A y B.

Una ecuación puede plantearse de otra forma. Considérense dos conjuntos A y B y dos aplicaciones f y g de A en B.

$$A \xrightarrow{f} B$$

$$A \xrightarrow{g} B$$

El problema de hallar los elementos de A que tienen la misma imagen por f que por g lleva a resolver la ecuación

$$f(x)=g(x)$$

es decir, a dar explícitamente el conjunto de soluciones

$$S=\{x \in A / f(x)=g(x)\}.$$

Hasta aquí se ha definido con mucha generalidad el concepto de «ecuación». En lo que sigue nos restringiremos principalmente a ecuaciones planteadas por aplicaciones entre conjuntos A y B numéricos, y más concretamente

cuando tanto A como B son el conjunto de los números reales. Ademas, la aplicación f, o f y g, serán aplicaciones definidas por polinomios o por fracciones algebraicas.

Ejercicio 53

Dada la aplicación $x \longrightarrow x^2$ del conjunto A en R, resuélvase la ecuación

$$x^2 = 3$$

cuando

a) *A es el conjunto de los racionales;*
b) *A es el conjunto de los reales positivos;*
c) *A es el conjunto R.*

OBSERVACIÓN: En general, en multitud de casos se sobrentienden cuáles son los conjuntos A y B; por lo que simplemente se dice: «resuélvase la ecuación $f(x)=b$». Pero el ejercicio anterior muestra que conviene saber entre qué conjuntos se establece la aplicación o aplicaciones que dan origen a la ecuación.

2. ECUACIONES EQUIVALENTES

DEFINICIÓN: Dos ecuaciones se llaman equivalentes cuando el conjunto de soluciones de una coincide con el de la otra.

Ejemplo 46

Las dos ecuaciones $3x-1=2$ y $4x+2=6$ son equivalentes, pues ambas tienen como conjunto de soluciones

$$S=\{1\}.$$

3. CRITERIOS DE EQUIVALENCIA

Comenzaremos por el caso más sencillo de ecuaciones, en las que f o f y g son polinomios. Tales ecuaciones, de las que son muestra

$$x^3-4x+2=0; \qquad x+4x^5=2x^3-1$$

se llaman enteras.

TEOREMA: Si $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ son polinomios, las dos ecuaciones

$$f(x)=g(x) \quad \text{y} \quad f(x)+h(x)=g(x)+h(x)$$

son equivalentes.

DEMOSTRACIÓN: Si llamamos S_1 y S_2 a los respectivos conjuntos de soluciones, se tiene

$$a \in S_1 \iff f(a)=g(a) \iff f(a)+h(a)=g(a)+h(a) \iff a \in S_2$$

Un corolario de este teorema es:

Las dos ecuaciones $f(x)=g(x)$ y $f(x)-g(x)=0$ son equivalentes.

En efecto: la segunda se obtiene de la primera, sumando a cada miembro de la ecuación el polinomio $-g(x)$.

De aquí también se desprende que es posible trasponer términos de un miembro al otro de la ecuación sin más que cambiarlos de signo, y la ecuación resultante es equivalente a la dada.

Ejemplo 47

La ecuación

$$3x-5+x^2=4+3x$$

se transforma, trasponiendo $3x-5$ al segundo miembro, en la siguiente:

$$x^2=4+3x-(3x-5)=9$$

es decir, en

$$x^2=9,$$

equivalente a la dada, obteniendo como conjunto de soluciones

$$S=\{3,\ -3\}.$$

Ejercicio 54

Efectúese una conveniente trasposición de términos que permita resolver fácilmente la ecuación

$$x^3-3x+7=1+2x+x^3.$$

Ejercicio 55

¿Es posible escribir toda ecuación entera en la forma $f(x)=0$?

4. MULTIPLICACION DE UNA ECUACION POR UN NUMERO

TEOREMA: Dada la ecuación $f(x)=g(x)$ y el número real no nulo k, las dos ecuaciones $f(x)=g(x)$ y $k\cdot f(x)=k\cdot g(x)$ son equivalentes.

DEMOSTRACIÓN: Llamando, como antes, S_1 y S_2 a los conjuntos de soluciones de una y otra ecuación se tiene

$$a\in S_1 \iff f(a)=g(a) \iff k\cdot f(a)=k\cdot g(a) \iff a\in S_2.$$

[El hecho de ser k no nulo se ha utilizado para deducir que si $k\cdot f(a)=k\cdot g(a)$, entonces $f(a)=g(a)$.]

Este teorema permite quitar denominadores numéricos cuando existen.

Ejemplo 48

La ecuación

$$\frac{3x-1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2x}{6}$$

se transforma, multiplicando ambos miembros por 6 (mínimo común múltiplo de los denominadores) en la equivalente

$$3\cdot(3x-1)+2=2x$$

o sea,

$$9x-3+2=2x,$$

es decir, trasponiendo,

$$7x=1,$$

cuya solución es inmediata.

Ejercicio 56

Quítense denominadores en las ecuaciones

a) $\dfrac{2x-12}{3}-\dfrac{1-3x}{4}=\dfrac{1+x}{5}$; *b)* $\dfrac{1-x}{2}+\dfrac{1+x}{3}=1+x.$

Ejercicio 57

¿Cuáles de las siguientes ecuaciones son equivalentes entre sí?

a) $x^2-3x+2=0$;
b) $2x-1=x^2-4$;
c) $2x^2-x=x^2+2x-2$;
d) $x^3+2-x^2=x^3-2x^2+3x$;
e) $\dfrac{x(x-2)}{3}=1$;
f) $x^4-3x=2+x.$

5. GRADO DE UNA ECUACION ENTERA

Todo lo anterior nos hace ver que, dada una ecuación entera $f(x)=g(x)$, (f y g, polinomios), siempre es posible ponerla en la forma equivalente

$$P(x)=0.$$

Las soluciones de esta ecuación suelen llamarse raíces del polinomio $P(x)$. El grado del polinomio se llama también «grado de la ecuación». Así, pueden considerarse ecuaciones de primer grado las que pueden escribirse en la forma

$$ax+b=0;$$

ecuaciones de segundo grado son aquellas equivalentes a una de la forma

$$ax^2+bx+c=0,$$

etcétera.

Ejemplo 49

La ecuación $(x-1)\cdot(4x-3)=(2x+1)^2$ es de primer grado, pues se puede escribir efectuando el producto de los dos polinomios del primer miembro y el cuadrado que figura en el segundo

$$4x^2-7x+3=4x^2+4x+1$$

y trasponiendo

$$4x^2-7x+3-(4x^2+4x+1)=0,$$

quedando por fin

$$-11x+2=0.$$

Ejemplo 50

La ecuación $x(x^2-1)=2x^2+3x-5$ es de tercer grado, pues se puede escribir

$$x^3-x=2x^2+3x-5$$

y trasponiendo

$$x^3-x-2x^2-3x+5=0$$

es decir,

$$x^3-2x^2-4x+5=0.$$

6. RESOLUCION DE LA ECUACION DE PRIMER GRADO

Dada una ecuación de primer grado, una vez quitados los denominadores si los hay, y trasponiendo términos, se la lleva a la forma

$$ax + b = 0$$

equivalente a

$$ax = -b$$

y supuesto $a \neq 0$, se puede multiplicar por el inverso, $1/a$, obteniéndose

$$x = -b \cdot \frac{1}{a} = -\frac{b}{a},$$

habiéndose conseguido la (única) raíz de la ecuación.

El proceso de resolución se basa, pues, en llegar, a través de una serie de transformaciones de la ecuación dada en otras equivalentes, a una de la forma

$$x = c.$$

Se dice, entonces, que ha quedado despejada la incógnita x.

Si a es cero, no tenemos propiamente ecuación de primer grado, pero conviene considerar este caso, que suele presentarse a veces, como lo muestra el ejemplo siguiente.

Resuélvase la ecuación

$$x + (x - 1) = 2(x + 3).$$

Efectuando las operaciones indicadas

$$2x - 1 = 2x + 6;$$

trasponiendo,

$$2x - 1 - (2x + 6) = 0,$$

es decir:

$$0 \cdot x - 7 = 0$$

o bien

$$0 \cdot x = 7.$$

Como, cualquiera que sea el número real x, $0 \cdot x = 0$, la ecuación propuesta carece de solución.

En cambio, si se parte de la ecuación

$$x+2(x-1)=3(x-2/3)$$

actuando de igual forma se llega a

$$x+2x-2=3x-2$$

o sea,

$$0\cdot x-0=0.$$

Cualquiera que sea el valor que se dé a x, la ecuación se satisface. Luego el conjunto de soluciones es todo R.

En resumen:

Ecuación

$$ax+b=0$$

Si $a\neq 0$: solución única $x=-b/a$.

Si $a=0$: $\begin{cases} b\neq 0. \text{ No hay solución (ecuación imposible).} \\ b=0. \text{ Todo número real es solución.} \end{cases}$

Ejercicio 58

Resuélvase la ecuación

$$4x-5=6x-12.$$

Ejercicio 59

Resuélvase la ecuación

$$12-(5x-4)=3x-(4x+1)-x.$$

Ejercicio 60

Resuélvase

$$(x-2)\cdot(x-1)+(x+3)\cdot(x-4)=x(2x-1)+3.$$

Ejercicio 61

Resuélvase la ecuación

$$\frac{2x-1}{4}+x=2x-3.$$

7. INTERPRETACION GEOMETRICA

Considérese la aplicación de R en R dada por

$$x \longrightarrow y = ax + b.$$

Esta aplicación es afín, y su gráfica es una línea recta.

Resolver la ecuación

$$ax + b = 0$$

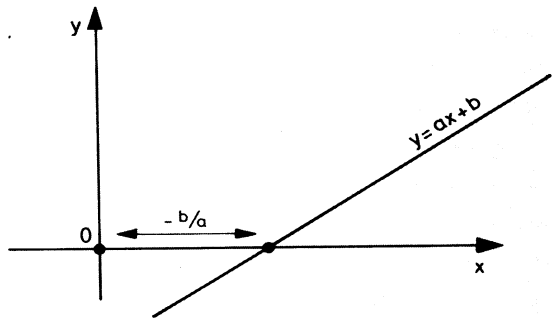


FIG. 3.33.

es determinar el punto x, en el que el valor de la aplicación afín es 0, o sea, hallar la abscisa del punto donde la recta representativa de la aplicación corta al eje OX.

8. ECUACION DE SEGUNDO GRADO

La ecuación de segundo grado tiene la forma

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

donde a, b y c son números reales cualesquiera, con la condición de que $a \neq 0$.

Cuando alguno de los coeficientes b y c, o los dos, son nulos, la ecuación se llama «incompleta». Como éstos son los casos de resolución más sencilla, los consideraremos en primer lugar.

a) Resolución de las ecuaciones incompletas:

I. Si $b = c = 0$, la ecuación de segundo grado se reduce a la siguiente:

$$ax^2 = 0$$

y como es $a \neq 0$

$$x^2 = 0$$

cuya única solución es $x = 0$.

II. Si $c=0$, pero $b \neq 0$, la ecuación es

$$ax^2+bx=0$$

que puede escribirse en la forma

$$x(ax+b)=0.$$

Para que al sustituir x por un número real el producto de los valores numéricos de x y $ax+b$ sea cero, tiene que serlo uno de ellos, así que:

$$x=0$$
$$ax+b=0, \text{ con lo que } x=-b/a.$$

En este caso, la ecuación tiene dos raíces, una de ellas nula.

III. Si $b=0$, pero $c \neq 0$, la ecuación es

$$ax^2+c=0,$$

equivalente a

$$ax^2=-c, \quad \text{de donde} \quad x^2=-\frac{c}{a}.$$

Ahora es preciso distinguir dos casos:

1.º Si $-c/a$ es negativo, es imposible extraer la raíz cuadrada de dicho número, por lo que la ecuación propuesta carece de solución.

2.º Si $-c/a$ es positivo, existe la raíz cuadrada de dicho número, y

$$x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

La ecuación posee, según esto, dos raíces opuestas.

Ejemplo 52

Al resolver la ecuación

$$(4x+1)^2=x^2+8x+3$$

se obtiene, desarrollando el cuadrado:

$$16x^2+8x+1=x^2+8x+3$$

y trasponiendo,

$$16x^2+8x+1-x^2-8x-3=0$$

es decir,

$$15x^2 - 2 = 0; \qquad x^2 = \frac{2}{15}.$$

Las dos soluciones son:

$$x = \pm \sqrt{\frac{2}{15}}$$

9. RESOLUCION DE LA ECUACION COMPLETA DE SEGUNDO GRADO

Considérese la ecuación completa

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Como $a \neq 0$, es posible multiplicar toda la ecuación por el número no nulo $4a$, obteniendo la ecuación equivalente

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

Ahora bien: $4a^2x^2 + 4abx$ son los dos primeros términos del desarrollo de $(2ax + b)^2$, puesto que

$$(2ax + b)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2,$$

por lo que se puede sustituir $4a^2x^2 + 4abx$ por $(2ax + b)^2 - b^2$, y la ecuación queda en la forma

$$(2ax + b)^2 - b^2 + 4ac = 0;$$

y trasponiendo $-b^2 + 4ac$ al segundo miembro,

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac,$$

de donde se deduce que

$$\text{o bien} \qquad 2ax + b = + \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\text{o bien} \qquad 2ax + b = - \sqrt{b^2 - 4ac}$$

Hemos obtenido *dos* ecuaciones de primer grado, que suelen englobarse en una sola expresión, así

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

y, finalmente,

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.}$$

Esta expresión da, en general, dos valores que corresponden a las dos raíces o soluciones de la ecuación de segundo grado.

Ejemplo 53

Aplíquese lo anterior para resolver la ecuación

$$x^2-3x+2=0.$$

En este caso, $a=1$, $b=-3$ y $c=2$, de forma que

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm1}{2},$$

obteniendo las dos raíces

$$\boxed{x_1=2} \quad \text{y} \quad \boxed{x_2=1}$$

Ejemplo 54

Al intentar resolver la ecuación

$$2x^2-3x+5=0$$

se llega a

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot2\cdot5}}{2\cdot2}=\frac{3\pm\sqrt{-31}}{4}.$$

Como no existen raíces reales de números negativos, la expresión anterior carece de sentido por ahora. La ecuación propuesta no tiene raíces en el cuerpo de los números reales.

10. DISCRIMINANTE DE UNA ECUACION DE SEGUNDO GRADO. DISCUSION

Los dos ejemplos anteriores ponen de manifiesto el papel que desempeña el radicando b^2-4ac en la naturaleza de las raíces de la ecuación.

> DEFINICIÓN: Se llama discriminante de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ a la expresión $\Delta=b^2-4ac$.

Para cada ecuación de segundo grado en que a, b y c son números reales perfectamente determinados, el discriminante toma un valor numérico, que podrá ser mayor, menor o igual que cero.

Como la expresión que da las raíces de la ecuación general de segundo grado puede escribirse así:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

resultan las siguientes posibilidades

a) $\Delta > 0$. Entonces, $\sqrt{\Delta}$ es un número real, y la ecuación tiene dos raíces distintas.

b) $\Delta = 0$. En este caso sólo existe una raíz de la ecuación, que es $x = -b/2a$. Suele decirse que la ecuación tiene una *raíz doble.*

c) $\Delta < 0$. En este caso, $\sqrt{\Delta}$ carece de sentido, pues no existen raíces cuadradas de números negativos. La ecuación carece de raíces en $\mathcal{R}$.

Como estos tres casos se excluyen mutuamente y no pueden existir más, queda completo el estudio de los casos que pueden presentarse al intentar resolver la ecuación de segundo grado.

Discriminante de $ax^2 + bx + c = 0$:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta > 0$. Dos raíces distintas.
$\Delta = 0$. Una sola raíz.
$\Delta < 0$. Carece de raíces reales.

Ejercicio 62

Sin resolver las siguientes ecuaciones, dígase cuál es la naturaleza de sus raíces

a) $3x^2 - 6x + 3 = 0$;
b) $x^2 + x + 1 = 0$;
c) $x^2 + 7{,}5x - 13{,}1 = 0$;
d) $x^2 + x\sqrt{2} - \sqrt{3} = 0$.

Ejercicio 63

Resuélvanse las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - 12x + 11 = 0$;
b) $3x^2 + 4x + 1 = 0$;
c) $(2x - 1) \cdot (x + 3) = 0$;
d) $4x^2 + 2x/5 - 7/4 = 0$.

Ejercicio 64

¿Cuál es el discriminante de la ecuación

$$2x^2 - 3x + (m + 1) = 0?$$

¿Qué valor habría de darse a m para que la ecuación resultante tuviera una sola raíz (doble)?

Ejercicio 65

La ecuación

$$x^2-(2m+3)x+5=0$$

tiene una raíz $x_1=-2$. *Hállese el valor que tiene m y calcúlese la otra raíz.*

11. SUMA Y PRODUCTO DE LAS RAICES DE UNA ECUACION DE SEGUNDO GRADO

Dada la ecuación $ax^2+bx+c=0$, se ha obtenido, como expresión de las raíces de la misma,

$$x_1=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Si se suman miembro a miembro ambas expresiones, resulta:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{2a}-\frac{b}{2a}=-\frac{2b}{2a}=-\frac{b}{a};$$

y si se multiplican miembro a miembro

$$x_1\cdot x_2=\left(-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\cdot\left(-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=\left(-\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2=$$

$$=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

Es decir: En la ecuación $ax^2+bx+c=0$, llamando x_1 y x_2 a sus raíces, se verifica:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

Estas relaciones permiten calcular la suma y el producto de raíces de una ecuación de segundo grado sin tener que resolverla.

Ejemplo 55

Las raíces de la ecuación $3x^2-7x-23=0$ tienen una suma que vale

$$x_1+x_2=-\frac{(-7)}{3}=7/3$$

y su producto es

$$x_1 \cdot x_2=-23/3.$$

Ejemplo 56

Sin resolver la ecuación $4x^2+7x-13=0$, calcúlese el valor de

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2},$$

donde x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación.

Como

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1 \cdot x_2},$$

basta conocer la suma y el producto de las dos raíces x_1 y x_2, lo que puede hacerse sin necesidad de resolver la ecuación. En este caso,

$$x_1+x_2=-\frac{7}{4} \quad \text{y} \quad x_1 \cdot x_2=-\frac{13}{4},$$

por lo que

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{-\frac{7}{4}}{-\frac{13}{4}}=\frac{7}{13}.$$

12. DETERMINACION DE LA ECUACION DE SEGUNDO GRADO CONOCIENDO LA SUMA Y EL PRODUCTO DE SUS RAICES

Las relaciones anteriores entre las raíces y los coeficientes de la ecuación pueden utilizarse en sentido contrario, es decir, para construir una ecuación de segundo grado conociendo la suma y el producto de sus raíces.

En efecto: si se sabe que

$$x_1+x_2=s$$

y que

$$x_1 \cdot x_2=p,$$

la ecuación

$$x^2 - sx + p = 0$$

es la buscada, ya que

$$x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0 \Longrightarrow ax^2 + bx + c = 0.$$

Ejemplo 57

Hállense dos números, sabiendo que su suma es -5, y su producto, 6. Los números buscados serán las raíces de la ecuación

$$x^2 - (-5)x + 6 = 0,$$

esto es:

$$x^2 + 5x + 6 = 0.$$

Resolviéndola:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2}$$

Los números son $x_1 = -2$ y $x_2 = -3$.

Ejercicio 66

¿Cuánto valen la suma y el producto de las raíces de las siguientes ecuaciones?

a) $3x^2 - 15x + 14 = 0$;
b) $-2x^2 + 4x + 81 = 0$;
c) $x^2\sqrt{2} - 1{,}5x + 3/4 = 0$;
d) $x^2 - 11{,}4 = 0$.

Ejercicio 67

¿Qué relación existe, cualquiera que sea m, entre las raíces de la ecuación

$$2x^2 - mx + 2 = 0?$$

Ejercicio 68

Constrúyanse las ecuaciones de segundo grado cuya suma y producto de raíces son

a) $s = -4$, $p = 3$;
b) $s = 1/4$, $p = -5$;
c) $s = p = 4$;
d) $s = 1$, $p = 1/2$.

13. ECUACIONES REDUCIBLES A ENTERAS

Comencemos por considerar un ejemplo.

Sea $f(x)=\dfrac{2x-3}{x^2-1}$ una fracción algebraica. Del mismo modo que un polinomio permite establecer una aplicación de R en R asociando a cada elemento $a \in R$ el valor numérico del polinomio en $x=a$, es posible hacer lo mismo con una fracción como la dada. Con una salvedad: En general, ya no se tiene una aplicación de R en R, sino una *función,* dado que pueden existir elementos de R que no tengan una imagen. En el ejemplo propuesto, ni 1 ni -1 tienen imagen, pues

$$f(1)=\frac{2\cdot 1-3}{1^2-1}=\frac{-1}{0},$$

que carece de sentido, al igual que $f(-1)$, pues

$$f(-1)=\frac{-5}{0}.$$

Admitido que f no define en general una aplicación de R en R, sino una función, es posible plantear ahora el mismo problema que dio origen al concepto de ecuación: Si f es una función racional (cociente de dos polinomios) de R en R, el problema de explicitar, dado un $b \in R$, el conjunto

$$S=\{x \in R/f(x)=b\}$$

se llama «resolución de la ecuación $f(x)=b$», que ahora no es entera.

Para la resolución de este tipo de ecuaciones se puede proceder como a continuación se indica en un ejemplo.

Ejemplo 58

Resuélvase la ecuación

$$\frac{2x+1}{x^2-2}=\frac{3}{x+4}.$$

Si multiplicamos toda la ecuación por el producto de los denominadores, para llegar a una ecuación entera, obtenemos

$$(2x+1)\cdot(x+4)=3\cdot(x^2-2);$$

es decir:

$$x^2-9x-10=0,$$

cuyas raíces son $x_1=-1$ y $x_2=10$, que, sustituidas en la ecuación original, la satisfacen. Como obviamente cualquier raíz de la ecuación original lo es

también de la ecuación entera obtenida al quitar denominadores, resulta que en este caso ambas son equivalentes.

Que esto no ocurre siempre se puede ver por el siguiente ejemplo.

Ejemplo 59

Resuélvase la ecuación

$$\frac{2x-3}{x+1}=\frac{2x-5}{1-x^2}$$

Procediendo como antes se llega a

$$2x^3-x^2-5x-2=0,$$

ecuación cúbica que tiene una raíz igual a -1. Eliminándola mediante división por la regla de Ruffini, se llega a que las tres raíces son:

$$x_1=-1, \quad x_2=2, \quad x_3=-1/2.$$

Sustituyendo en la ecuación de partida se comprueba que son raíces suyas 2 y $-1/2$, pero no -1, ya que al hacer la sustitución

$$\frac{2\cdot(-1)-3}{-1+1}=\frac{2\cdot(-1)-5}{1-(-1)^2}$$

los denominadores se anulan, y ambos miembros carecen de sentido.

La explicación es clara. La ecuación original ha surgido al buscar, dadas las dos funciones de R en R

$$f(x)=\frac{2x-3}{x+1} \quad \text{y} \quad g(x)=\frac{2x-5}{1-x^2},$$

los elementos de R que tienen igual imagen por f que por g. Pero al no estar definidas f y g en el mismo punto $x=-1$, ese valor debe ser dejado fuera de consideración.

Ejercicio 69

Resuélvase la ecuación

$$\frac{2x-7}{2x-3}+2=\frac{5}{2(2x-3)}-\frac{1}{4}.$$

Ejercicio 70

Resuélvase la ecuación

$$\frac{3x-1}{x-2}+\frac{2}{x+2}=\frac{3x^2}{x^2-4}.$$

Como regla práctica queda:

> Para resolver una ecuación racional se quitan los denominadores como si fueran numéricos, obteniendo una ecuación entera. Las soluciones de esta última, dejando fuera de consideración aquellos valores que anulen a los denominadores, son las soluciones de la ecuación dada.

14. ECUACIONES IRRACIONALES

Se llaman así aquellas ecuaciones en las que la incógnita aparece dentro de algún radical, por ejemplo,

$$x + \sqrt{x} = 6.$$

La resolución de una ecuación irracional se basa siempre en hacer desaparecer el radical, elevando a una potencia adecuada los dos miembros de la ecuación, después de haber hecho aquellas trasposiciones de términos que fueran necesarias (por ejemplo, si hay un solo radical, para dejarlo aislado en un miembro).

Hay que tener presente que elevar a una potencia, que supone multiplicar varias veces por sí mismo cada miembro de la ecuación, puede originar ecuaciones que no son equivalentes a la dada, aunque toda solución de la propuesta lo es de la transformada. Luego será necesario ir comprobando para ver cuáles son soluciones de la dada y cuáles no.

Para ilustrar lo anterior veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 60

La ecuación $x = 5$ tiene la única raíz 5.

Si se elevan ambos miembros al cuadrado, resulta

$$x^2 = 25,$$

cuyas raíces son $x_1 = 5$ y $x_2 = -5$.

La elevación al cuadrado ha hecho aparecer una solución que no tenía la ecuación propuesta.

Ejemplo 61

Resuélvase la ecuación

$$2x - 5 = 1 + \sqrt{2x}.$$

Trasponiendo 1 al primer miembro, de manera que quede solamente el radical en el segundo miembro, y elevando al cuadrado luego, queda:

$$(2x-6)^2=(\sqrt{2x})^2; \qquad 4x^2-24x+36-2x$$

y, finalmente,

$$4x^2-26x+36=0.$$

Dividiendo por 2 para simplificar,

$$2x^2-13x+18=0,$$

cuyas soluciones son 9/2 y 2.

La solución 9/2, sustituida en la ecuación dada, la verifica. Pero no ocurre así con $x=2$, pues

$$2\cdot 2-5=-1\neq 1+\sqrt{2\cdot 2}=1+2=3.$$

La solución $x=2$ se ha introducido al elevar al cuadrado. Ha de desecharse.

Ejercicio 71

Resuélvase la ecuación

$$\sqrt{x^2+4}=x-2.$$

Ejercicio 72

Resuélvase la ecuación

$$\sqrt{x^2-3}+5=x.$$

Ejercicio 73

Resuélvase la ecuación

$$\sqrt{2x-1}-\sqrt{2x-4}=3.$$

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 3.3

53. *a)* No tiene soluciones;

b) $x=\sqrt{3}$;

c) $x_1=\sqrt{3}, \quad x_2=-\sqrt{3}.$

54. Traspóngase $2x+x^3$ al primer miembro, y 7, al segundo.

55. Sí.

56. *a)* $20(2x-12)-15(1-3x)=12(1+x)$;

b) $3(1-x)+2(1+x)=6(1+x)$.

57. Las ecuaciones *a*, *c* y *d*, por un lado; las *b* y *e*, por otro.

58. $x = 7/2$.

59. $x = 17/3$.

60. $x = -13/3$.

61. $x = 11/2$.

62. *a)* una raíz (doble);
b) no hay raíces;
c) dos raíces distintas;
d) dos raíces distintas.

63. *a)* $x_1 = 11$; $x_2 = 1$;
b) $x_1 = -1$; $x_2 = -1/3$;
c) $x_1 = 1/2$; $x_2 = -3$;
d) $x = \dfrac{-1 \pm 4\sqrt{11}}{20}$.

64. $\Delta = 9 - 8(m+1)$.

$\Delta = 0 \iff 9 - 8(m+1) = 0 \implies m = \dfrac{1}{8}$.

65. $m = -15/4$; $x_2 = -5/2$.

66. *a)* $s = 5$; $p = 14/3$;
b) $s = 2$; $p = -81/2$;
c) $s = 3\sqrt{2}/4$; $p = 3\sqrt{2}/8$;
d) $s = 0$; $p = 11{,}4$.

67. $x_1 \cdot x_2 = 1$. Son inversas una de la otra.

68. *a)* $x^2 + 4x + 3 = 0$;
b) $x^2 - \dfrac{x}{4} - 5 = 0$;
c) $x^2 - 4x + 4 = 0$;
d) $x^2 - x + \dfrac{1}{2} = 0$.

69. $x = \dfrac{5}{2}$. No hay que rechazar soluciones.

70. $x = \dfrac{6}{7}$.

71. No tiene solución, pues la que se obtiene al elevar al cuadrado, que es $x = 0$, no satisface la ecuación dada.

72. No tiene solución, por la misma razón que la anterior.

73. Elévese dos veces al cuadrado. La solución sería $x = \dfrac{5}{2}$, pero no satisface la ecuación.

3.4

Sistemas de ecuaciones. Inecuaciones

1. ECUACION DE PRIMER GRADO CON DOS INCOGNITAS

Considérense el conjunto $R \times R$ y la aplicación f de $R \times R$ en R, definida así:

$$R \times R \xrightarrow{f} R$$
$$(x, y) \longrightarrow ax + by + c \quad (a, b, c \in R).$$

Fijado un elemento m de R, puede plantearse el problema de hallar explícitamente el conjunto

$$S = \{(x, y) \in R \times R / f(x, y) = m\}.$$

Estamos, pues, ante la resolución de una ecuación de primer grado en dos incógnitas x e y.

En contra de lo que ocurre en el caso general de una ecuación de primer grado con una incógnita, la ecuación

$$ax + by + c = m$$

posee una infinidad de soluciones. No hay más que observar que si $b \neq 0$, para cada valor que se dé a y se obtiene una ecuación de primer grado en x que tiene una raíz. Así, para cada y existe un x, tal que el par (x, y) es solución de la ecuación.

Ejemplo 62

Sea la ecuación

$$3x + 2y - 5 = 0.$$

Para $y=1$ se obtiene

$$3x+2-5=0; \quad 3x-3=0; \quad x=1,$$

y el par (1, 1) es solución de la ecuación dada.

Si se hace $y=-1$ queda

$$3x-2-5=0; \quad 3x-7=0; \quad x=7/3,$$

y el par $(7/3, -1)$ también es solución.

Ejercicio 74

Obténganse otros dos pares que sean solución de la ecuación del ejemplo anterior.

Ejemplo 61

Para ver que la ecuación $ax+by+c=0$ admitía una infinidad de soluciones se ha supuesto que b era distinto de cero. Pero si b es cero ocurre lo mismo. Considérese la ecuación

$$4x+0\cdot y-2=0,$$

que en realidad se escribiría

$$4x-2=0.$$

Todos los pares $(1/2, y)$, cualquiera que sea el valor de y, son solución.

Esto vuelve a poner de manifiesto que, junto con la «forma» particular de la ecuación hay que tener en cuenta cuál es el conjunto de partida (donde se buscan las soluciones). Así, la ecuación

$$4x-2=0$$

como ecuación en x admite la única solución $x=1/2$. Pero interpretando la aplicación

$$(x, y) \longrightarrow 4x-2,$$

y buscando los pares que tienen como imagen el cero, obtenemos la infinidad de soluciones $(1/2, y)$.

2. REPRESENTACION GRAFICA

Puesto que cualquier ecuación de la forma $ax+by+c=m$ puede ponerse, trasponiendo m, en la forma

$$ax+by+c-m=0,$$

vamos a considerar una con el segundo miembro ya cero:

$$ax + by + c = 0.$$

Si $b \neq 0$ se puede trasponer $ax + c$ al segundo miembro y dividir por b, con lo que resulta la ecuación equivalente

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Si se considera ahora la aplicación afín de R en R dada por

$$x \longrightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \qquad [1]$$

resulta que, para cada valor que se dé a x, se obtiene uno para y, de forma que el par (x, y) es solución de la ecuación propuesta, y recíprocamente, cada solución de la ecuación dada es un par de números (x, y), de manera que y es la imagen de x en la aplicación afín considerada. En consecuencia, el conjunto de soluciones de la ecuación $ax + by + c = 0$ puede representarse gráficamente por el conjunto de puntos de una recta, precisamente la gráfica de la aplicación afín [1].

Ejemplo 64

Para la ecuación $2x + 3y = 5$ la aplicación afín asociada es

$$y = -\frac{2x}{3} + \frac{5}{3}.$$

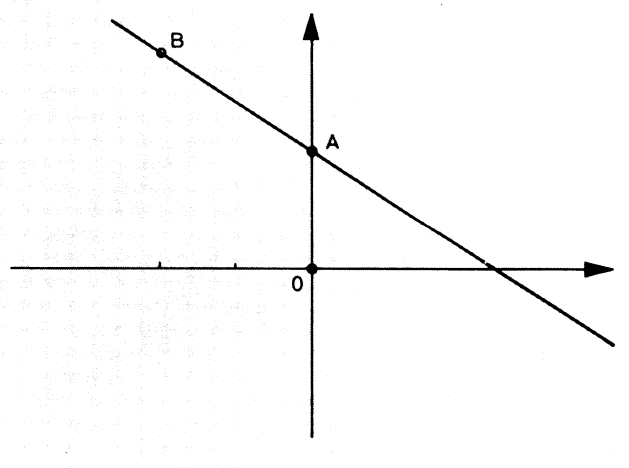


FIG. 3.34.

Para el valor $x=0$ se obtiene $y=5/3$. Para $x=-2$, $y=3$. La gráfica es la recta que pasa por los puntos

$$A(0,5/3) \quad \text{y} \quad B(-2,3)$$

representada en la figura.

Ejercicio 75

Dibújese la recta representativa del conjunto de soluciones de la ecuación

$$3x-4y-5=0.$$

Ejercicio 76

Represéntese gráficamente el conjunto de soluciones de la ecuación

$$x+2y-6=0.$$

Ejercicio 77

Dada la ecuación $3x-4y+2=0$, *obténgase:*

a) *una solución de la misma en la que tanto* x *como* y *sean negativas.*
b) *otra solución con* x *e* y *positivas.*

Si la ecuación $ax+by+c=0$ tiene nulo el coeficiente b, no es posible obtener una aplicación afín como antes. Pero es también fácil obtener una representación gráfica del conjunto de soluciones. Si la ecuación es la del ejemplo 63.

$$4x-2=0,$$

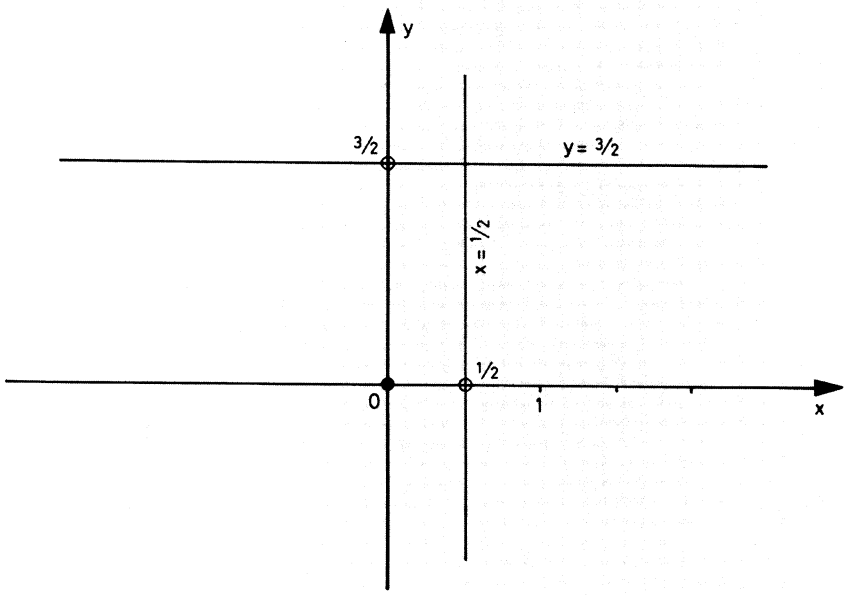


FIG. 3.35.

todas sus soluciones son los pares de la forma $(1/2, y)$ con y cualquiera. Si se representan todos los puntos de coordenadas $(1/2, y)$ se observa que se sitúan en una recta, perpendicular al eje OX en el punto de abscisas 1/2.

Por último, si es $a=0$ y $b\neq 0$, se obtiene una aplicación constante, ya que cualquiera que sea el valor de x la imagen es siempre la misma

$$y = -c/b.$$

Es el caso representado en la figura, correspondiente a la ecuación

$$2y - 3 = 0,$$

cuyas soluciones son los pares

$$(x, 3/2)$$

con x arbitrario. La recta representativa del conjunto de soluciones es paralela al eje de abscisas.

3. SISTEMAS DE DOS ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCOGNITAS

Consideremos dos ecuaciones de primer grado del tipo anterior

$$ax + by + c = 0$$
$$mx + ny + p = 0$$

Sea S_1 el conjunto de soluciones de la primera ecuación; S_2 el de la segunda.

Planteemos el siguiente problema:

Hállese explícitamente el conjunto $S_1 \cap S_2$.

Es decir, buscamos el conjunto de pares (x, y), que son a la vez solución de una y otra ecuación.

El problema así planteado recibe el nombre de «resolución de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas».

4. METODOS DE RESOLUCION. RESOLUCION GRAFICA

Existe un método de resolución del sistema que se basa en la representación gráfica de los conjuntos de soluciones S_1 y S_2. Puesto que se buscan los pares (x, y) que pertenecen a la vez a S_1 y a S_2, y cada uno de estos conjuntos se puede representar por una recta, basta hacer tal representación y buscar los puntos comunes a ambas. Las coordenadas (x, y) del punto o puntos comunes son soluciones del sistema.

Ejemplo 65

Resuélvase gráficamente el sistema

$$2x - 3y = 1$$
$$x + 2y + 3 = 0$$

Basta con obtener un par de soluciones de la primera ecuación para dibujar la recta representativa, e igual con la segunda.

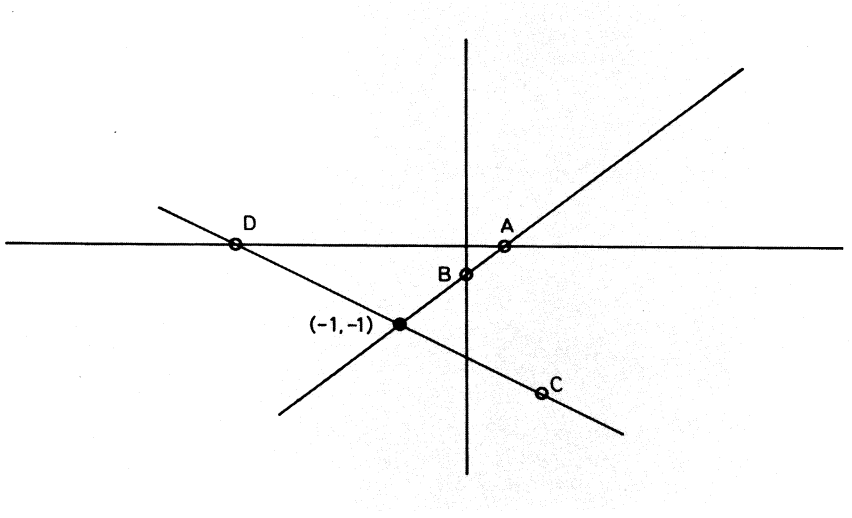


FIG. 3.36.

Para $y = 0$,

$$x = 1/2$$

Para $x = 0$,

$$y = -1/3$$

Luego la recta es la que pasa por los puntos $A(1/2, 0)$ y $B(0, -1/3)$.

Procediendo de forma análoga con la segunda ecuación se observa que la recta representativa pasa por los puntos $C(1, -2)$ y $D(-3, 0)$. Dibujándolas, se ve que ambas rectas se cortan en el punto $(-1, -1)$, que resulta ser la solución (única) del sistema.

Este método se puede utilizar siempre, pero existe un inconveniente, y es la poca aproximación a causa de los seguros errores de dibujo. Para reducir el error en la representación de las rectas conviene escoger los dos puntos necesarios para su trazado lo más alejados posible. En el ejemplo anterior están mejor elegidos C y D que A y B.

5. METODO DE IGUALACION

Dado el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} ax + by + c = 0 \\ mx + ny + p = 0 \end{aligned}\right\} \qquad [2]$$

se pueden considerar las dos aplicaciones afines

$$\left.\begin{aligned} y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \\ y = -\frac{m}{n}x - \frac{p}{n} \end{aligned}\right\} \qquad [3]$$

obtenidas despejando y en una y otra ecuación.

Buscar una solución del sistema [2] equivale a buscar un par (x, y) tal que la imagen de x por la primera aplicación afín sea igual a la imagen del mismo x por la segunda. Es decir, x debe verificar

$$-\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} = -\frac{m}{n}x - \frac{p}{n}.$$

Esta es una ecuación de primer grado en x. Resuelta, se sustituye el valor de x en cualquiera de las ecuaciones [3] para obtener y.

Como el método se basa en despejar y en ambas ecuaciones e *igualar* las expresiones obtenidas, recibe el nombre de «método de igualación».

Ejemplo 66

Resuélvase el sistema

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y = 4 \\ 3x + 5y = -8 \end{aligned}\right\}$$

Despejando y en ambas ecuaciones,

$$y = \frac{4 - 2x}{3} \quad \text{de la primera;}$$

$$y = \frac{-8 - 3x}{5} \quad \text{de la segunda.}$$

Igualando ambas:

$$\frac{4 - 2x}{3} = \frac{-8 - 3x}{5}$$

Quitando denominadores:

$$20 - 10x = -24 - 9x,$$

y, trasponiendo,

$$44 - x = 0.$$

Luego,

$$x = 44.$$

Llevando este valor a cualquiera de las expresiones de y:

$$y = \frac{4 - 2 \cdot 44}{3} = -28.$$

La solución del sistema es

$$(x, y) = (44, -28).$$

El método se puede aplicar igualmente, despejando x en lugar de y.

Ejemplo 67

Resuélvase el sistema

$$\left.\begin{aligned} x + 5y &= 3 \\ 2x - 8y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Se tiene:

$$x = 3 - 5y; \qquad x = \frac{1 - 8y}{2}.$$

Igualando,

$$3 - 5y = \frac{1 - 8y}{2}; \qquad 6 - 10y = 1 - 8y; \qquad 5 = 18y,$$

de donde

$$y = 5/18$$

y, entonces,

$$x = 3 - 5y = 3 - 5 \cdot (5/18) = 29/18.$$

La solución es, pues,

$$\boxed{(x, y) = (29/18, 5/18).}$$

6. METODO DE SUSTITUCION

En lugar del método anterior puede utilizarse el consistente en despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones y sustituir la expresión obtenida en la otra. Se obtiene de esta forma una ecuación de primer grado en una de las incógnitas, que, resuelta, proporciona el valor de la misma. Susti-

tuyendo este valor en la expresión de la otra incógnita se obtiene la solución del sistema.

Ejemplo 68

Resuélvase

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &= 4 \\ 3x + 4y &= -6 \end{aligned}\right\}$$

Despejando y en la primera ecuación, resulta:

$$y = 2x - 4;$$

Sustituyendo este valor en la segunda:

$$3x + 4 \cdot (2x - 4) = -6; \qquad 3x + 8x - 16 = -6;$$
$$11x = 16 - 6 = 10; \qquad x = 10/11,$$

con lo cual

$$\boxed{y = 2x - 4 = 2 \cdot (10/11) - 4 = -24/11.}$$

La solución es

$$(x, y) = (10/11, -24/11).$$

Ejercicio 78

Resuélvase, por el método de igualación, el sistema

$$\left.\begin{aligned} x/3 + y/4 &= 1 \\ 2x - 5y &= -12 \end{aligned}\right\}$$

Ejercicio 79

Resuélvase, por el método de sustitución

$$\left.\begin{aligned} x + 13y &= -11 \\ 2x - 3y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Ejercicio 80

Resuélvanse los siguientes sistemas por cualquiera de los dos métodos explicados anteriormente:

a) $\left.\begin{aligned} x - 3y &= 1/2 \\ 2x + y &= 4 \end{aligned}\right\}$; *b)* $\left.\begin{aligned} x/3 + y/4 &= -1 \\ x + y &= 5 \end{aligned}\right\}$; *c)* $\left.\begin{aligned} 10x - 3y &= 4 \\ x/2 - y/3 &= 14 \end{aligned}\right\}$

Ejercicio 81

Hállense dos números sabiendo que su suma es 1, *y que el doble de uno de ellos, menos tres veces el otro, es igual a* 12.

7. METODO DE REDUCCION

Si se da el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} ax+by+c=0 \\ mx+ny+p=0 \end{aligned}\right\}$$

y se consideran dos números no nulos r y s, cualquier solución del sistema anterior es también solución de la ecuación

$$r\cdot(ax+by+c)+s\cdot(mx+ny+p)=0,$$

obtenida multiplicando la primera ecuación por r y sumándola a la segunda, multiplicada por s.

DEMOSTRACIÓN: Si (α, β) es una solución del sistema, se verifica:

$$\begin{aligned} a\alpha+b\beta+c=0 \\ m\alpha+n\beta+p=0; \end{aligned}$$

por lo que

$$r(a\alpha+b\beta+c)+s(m\alpha+n\beta+p)=r\cdot 0+s\cdot 0=0$$

y (α, β) es solución de dicha ecuación.

Consecuencia de lo anterior es que los dos sistemas de ecuaciones

$$\left\{\begin{aligned} ax+by+c=0 \\ mx+ny+p=0 \end{aligned}\right. \quad \text{y} \quad \left\{\begin{aligned} ax+by+c=0 \\ r(ax+by+c)+s(mx+ny+p)=0 \end{aligned}\right.$$

son equivalentes (tienen las mismas soluciones).

El método de reducción se basa en este hecho, eligiendo r y s de forma que esta ecuación

$$r(ax+by+c)+s(mx+ny+p)=0$$

tenga alguno de los coeficientes de las incógnitas igual a cero, con lo cual sólo queda una ecuación de primer grado en la otra, que, resuelta, da el valor de la misma. Basta sustituir este valor en la otra ecuación para hallar la otra incógnita. Para lograr que el coeficiente de x sea cero, basta tomar $r=m$ y $s=-a$.

Ejemplo 69

Resuélvase el sistema

$$\left.\begin{aligned} 3x-5y=-4 \\ 2x+3y=1 \end{aligned}\right\}$$

Multiplicando la primera ecuación por 2 y la segunda por -3 resulta:

$$\left.\begin{array}{r} 6x-10y=-8 \\ -6x-\ 9y=-3 \end{array}\right\}+$$

Sumando $\qquad 0\cdot x-19y=-11;$

de donde

$$y=11/19.$$

Sustituyendo en la ecuación $2x+3y=1$,

$$2x+3\cdot(11/19)=1; \qquad 2x+33/19=1.$$

Quitando denominadores y resolviendo

$$38x+33=19; \qquad 38x=-14; \qquad x=-14/38=-7/19.$$

La solución es

$$(x, y)=(-7/19, 11/19).$$

Ejemplo 70

Resuélvase

$$\left.\begin{array}{l} 3x-y=5 \\ 2x+y=1 \end{array}\right\}$$

En este caso basta sumar las dos ecuaciones, para obtener una en la que ha desaparecido la incógnita y

$$\begin{array}{l} 3x-y=5 \\ 2x+y=1 \\ \hline 5x\ \ =6 \end{array} \qquad x=6/5; \qquad y=3x-5=18/5-5=-7/5.$$

Solución:

$$(x, y)=(6/5, -7/5).$$

Ejercicio 82

Resuélvase, por el método de reducción, el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x/3+y/4=1 \\ 2x-3y=-2 \end{array}\right\}$$

En los siguientes ejercicios se pide resolver, por reducción, cada uno de los sistemas propuestos.

Ejercicio 83

$$\left.\begin{array}{r} x+3\ =2y-5 \\ 2x+3y=1\ -x \end{array}\right\}$$

Ejercicio 84

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{3}-\frac{5y-1}{4}&=2 \\ \frac{2x}{3}+5y\quad&=1 \end{aligned}\right\}$$

Ejercicio 85

$$\left.\begin{aligned} x-y-1&=2x+3 \\ 5y-2x&=7 \end{aligned}\right\}$$

8. DISCUSION DE UN SISTEMA DE DOS ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Recordando la resolución gráfica de un sistema de dos ecuaciones de primer grado, se ve que las soluciones se obtienen como coordenadas de puntos comunes a dos rectas. Siendo así, que dos rectas en el plano sólo pueden tener un punto común como máximo (si son distintas) resulta que, en general, un sistema de dos ecuaciones lineales (así se llama a las de primer grado) tiene una solución única.

Es también posible que un tal sistema no tenga solución. Esto ocurrirá cuando las rectas representativas de cada una de las ecuaciones sean paralelas. Y, por último, cabe que el sistema tenga una infinidad de soluciones, en el caso de que las dos rectas representativas coincidan.

Ejemplo 71

Todos los sistemas considerados hasta ahora en los ejemplos han tenido solución única.

Ejemplo 72

El sistema

$$\left.\begin{aligned} x+2y&=1 \\ 2x+4y&=-3 \end{aligned}\right\}$$

no tiene solución, pues si intentamos resolverlo por reducción, multiplicando la primera ecuación por -2 y sumándola a la segunda, resulta:

$$\begin{array}{r} -2x-4y=-2 \\ 2x+4y=-3 \\ \hline 0\cdot x+0\cdot y=-5, \end{array}$$

que carece de soluciones.

El sistema propuesto es imposible. De manera incorrecta suele decirse que es incompatible. En todo caso, puede afirmarse que son las dos ecuaciones las que resultan incompatibles, una con otra.

Ejemplo 73

El sistema

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 1 \\ 2x - 2y &= 2 \end{aligned}\right\}$$

admite una infinidad de soluciones, pues la segunda ecuación se obtiene de la primera, sin más que multiplicarla por 2, de forma que toda solución de una lo es también de la otra. Los conjuntos de soluciones coinciden y la intersección

$$S_1 \cap S_2 = S_1 = S_2.$$

Para ver las exigencias que cada uno de estos tres casos impone a los coeficientes, resolvamos el sistema

$$\left.\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ mx + ny + p &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Multiplicando la primera por m, la segunda por $-a$, y, sumando, se obtiene

$$(mb - an)y + (mc - ap) = 0,$$

de donde, si $mb - an \neq 0$, es posible despejar

$$y = -(mc - ap)/(mb - an).$$

De forma análoga, multiplicando la primera ecuación por n y la segunda por $-b$ y, sumando, se llega a

$$(na - mb)x + nc - bp = 0,$$

de donde

$$x = \frac{bp - nc}{an - mb};$$

y cambiando el signo al numerador y denominador de y

$$y = \frac{mc - ap}{an - mb}.$$

Todo lo anterior tiene sentido si $(an - mb)$ es distinto de cero. En este caso, el sistema tiene solución única, dada por las expresiones anteriores.

Si $(an-mb)$ es cero, ya no es posible despejar x e y. Pero $(an-mb)=0$ se puede escribir así

$$an=mb$$

o bien

$$\frac{a}{m}=\frac{b}{n}.$$

Esto nos dice que los coeficientes de x y de y en una ecuación son proporcionales a los correspondientes en la otra. Si también lo son los términos independientes, resulta que una de las ecuaciones se puede obtener de la otra, multiplicándola por un número. El sistema posee, pues, una infinidad de soluciones. Si, en cambio, se verifica

$$k=\frac{a}{m}=\frac{b}{n}\neq\frac{c}{p},$$

entonces es posible, multiplicando la segunda ecuación por k, escribir el sistema en la forma

$$\left.\begin{aligned} ax+by+c&=0\\ ax+by+kp&=0\end{aligned}\right\}$$

y

$$kp\neq c.$$

Si se pasan los términos independientes al segundo miembro, se ve que el sistema no puede tener solución, pues los primeros miembros tomarían el mismo valor $ax+by$, mientras que los segundos serían diferentes, uno $-c$ y otro $-kp$.

Resumiendo:

Sistema lineal

$$\left.\begin{aligned} ax+by+c&=0\\ mx+ny+p&=0\end{aligned}\right\}$$

$an-mb\neq 0 \Rightarrow$ *Solución única*

$an-mb=0$

$\frac{a}{m}=\frac{b}{n}\neq\frac{c}{p} \Rightarrow$ Sistema imposible

$\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\frac{c}{p} \Rightarrow$ Sistema con una infinidad de soluciones

Ejercicio 86

¿Para qué valores de m el sistema

$$\left\{\begin{aligned} mx-y&=3\\ x-my&=m-2\end{aligned}\right.$$

tiene solución única? ¿Existe algún valor de m para el cual el sistema resultante tenga una infinidad de soluciones?

Ejercicio 87

Resuélvase el sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{7+x}{5}-\frac{2x-y}{4}&=3y-5\\ \frac{5y-7}{2}+\frac{4x-3}{6}&=18-5x \end{aligned}\right\}$$

9. SISTEMAS NO LINEALES

Un sistema de dos ecuaciones del tipo

$$\begin{aligned} f(x,y)&=0\\ g(x,y)&=0 \end{aligned}$$

en que uno de los dos, f o g, no son polinomios de primer grado, se llama sistema no lineal.

Ejemplo 74

El sistema

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2-25&=0\\ x+y-7&=0 \end{aligned}\right\}$$

es no lineal, pues la primera ecuación es de segundo grado.

Para la resolución de estos sistemas no lineales se pueden utilizar alguno de los métodos expuestos para los de primer grado. Concretamente, el de sustitución se puede aplicar siempre que sea posible despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones.

Ejemplo 75

El sistema antes citado,

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2-25&=0\\ x+y-7&=0 \end{aligned}\right\}$$

puede resolverse despejando y en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera

$$y=7-x; \qquad x^2+(7-x)^2-25=0; \qquad 2x^2-14x+24=0.$$

Dividiendo por 2, para simplificar la ecuación,

$$x^2-7x+12=0;$$

que, resuelta, da $x_1=3$, $x_2=4$.

Los valores correspondientes de y son $y_1=4$, $y_2=3$. Por tanto, el sistema propuesto admite las dos soluciones

$$(3,4) \quad \text{y} \quad (4,3).$$

Ejemplo 76

Resuélvase

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=169 \\ xy&=60 \end{aligned}\right\}$$

Se puede despejar y en la segunda ecuación y sustituir en la primera, pero resulta más fácil proceder como sigue: Multiplicando por 2 la segunda ecuación y sumando miembro a miembro resulta:

$$x^2+y^2+2xy=289.$$

Pero el primer miembro de esta ecuación es el cuadrado de $x+y$. Por tanto,

$$(x+y)^2=289,$$

de donde

$$x+y=\pm\sqrt{289}=\pm 17.$$

Si, en vez de sumar, se hubiese restado,

$$x^2+y^2-2xy=49;$$

esto es:

$$(x-y)^2=49,$$

de donde

$$x-y=\pm\sqrt{49}=\pm 7.$$

Se obtienen así cuatro sistemas de primer grado al combinar los signos + y − de todas las formas posibles:

$$\left.\begin{aligned} x+y&=17 \\ x-y&=7 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x+y&=-17 \\ x-y&=7 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x+y&=-17 \\ x-y&=-7 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x+y&=17 \\ x-y&=-7 \end{aligned}\right\}$$

y, resolviéndolos, se obtienen las cuatro soluciones del problema propuesto

$$(12,5), \qquad (-5,-12), \qquad (-12,-5), \qquad (5,12).$$

Ejercicio 88

Resuélvase el sistema

$$\left.\begin{aligned} 1/x + 1/y &= 7/12 \\ xy &= 12 \end{aligned}\right\}$$

Ejercicio 89

Resuélvase el sistema

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 5 \\ x^2 - y^2 &= 5 \end{aligned}\right\}$$

Ejercicio 90

Resuélvase el sistema

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x &= 0 \\ x^2 + y^2 - y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

10. SISTEMAS LINEALES DE TRES O MAS ECUACIONES CON TRES O MAS INCOGNITAS

Baste señalar que es posible considerar ecuaciones de primer grado en más de dos incógnitas y, por ende, también sistemas de ecuaciones. Los tres métodos de resolución utilizados en el caso de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas siguen siendo aplicables para estos sistemas de mayor número de ecuaciones.

Ejemplo 77

Resuélvase el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ 2x - y - z &= -1 \\ x + 2y + 3z &= 9 \end{aligned}\right\}$$

Si se suman las dos primeras (método de reducción) desaparecen y y z, quedando

$$3x = 3,$$

de donde

$$x = 1.$$

Sustituyendo este valor en la segunda y tercera ecuación queda

$$\left.\begin{aligned} 2 - y - z &= -1 \\ 1 + 2y + 3z &= 9 \end{aligned}\right\}$$

Despejando y en la primera de estas dos, y sustituyendo en la otra

$$y=3-z$$
$$1+2(3-z)+3z=9; \qquad 1+6-2z+3z=9$$

y, en definitiva,

$$7+x=9,$$

de donde

$$z=2,$$

con lo cual

$$y=3-z=3-2=1.$$

La solución (única) de este sistema es $(x, y, z)=(1, 1, 2)$.

Ejercicio 91

Resuélvase el sistema

$$\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ y+z=2 \\ z+x=\frac{1}{2} \end{array}\right\}$$

11. INECUACIONES

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos aplicaciones (o, más generalmente, dos funciones) de R en R, al estar el cuerpo de los números reales ordenado, es posible plantear el problema de hallar todos los números x, para los cuales se cumple

$$f(x)>g(x).$$

Este problema recibe el nombre de «inecuación en una incógnita».

De forma similar, se define una inecuación en dos o más incógnitas.

En lo que sigue, nos limitaremos al caso de inecuaciones, en las que tanto f como g son aplicaciones polinómicas.

DEFINICIÓN: Dos inecuaciones se llaman equivalentes si el conjunto de soluciones de una coincide con el de la otra.

TEOREMA: Si se suma un mismo polinomio $h(x)$ a los dos miembros de la inecuación

$$f(x)>g(x),$$

la inecuación resultante es equivalente a la dada.

DEMOSTRACIÓN: Llamando

$$S_1 = \{x \in R / f(x) > g(x)\}$$
$$S_2 = \{x \in R / f(x) + h(x) > g(x) + h(x)\},$$

se tiene

$$a \in S_1 \iff f(a) > g(a) \iff f(a) + h(a) > g(a) + h(a) \iff a \in S_2.$$

La consecuencia inmediata de este teorema es que se pueden trasponer de un miembro a otro los términos que se quiera, y en particular que la inecuación

$$f(x) > g(x) \quad \text{es equivalente a} \quad f(x) - g(x) > 0.$$

Por consiguiente, consideraremos inecuaciones del tipo

$$0 < f(x).$$

TEOREMA: Si $c > 0$, las inecuaciones

$$0 < f(x)$$
$$0 < cf(x)$$

son equivalentes.

DEMOSTRACIÓN: Llamando S_1 y S_2 a los respectivos conjuntos de soluciones se tiene

$$a \in S_1 \iff f(a) > 0 \underset{\text{(por ser } c>0)}{\iff} cf(a) > 0 \iff a \in S_2$$

En cambio, si $c < 0$, son equivalentes, $f(x) > 0$ y $cf(x) < 0$.

12. INECUACION DE PRIMER GRADO CON UNA INCOGNITA

Se llama así a toda inecuación que puede llevarse a la forma

$$0 < ax + b.$$

Ejemplo 78

La inecuación $x^2 - 3x + 1 > x^2 - 5x$ es de primer grado, pues trasponiendo los términos del segundo miembro al primero resulta la inecuación equivalente

$$x^2 - 3x + 1 - (x^2 - 5x) > 0;$$

es decir,

$$2x + 1 > 0.$$

Para resolver la inecuación $0<ax+b$ supongamos $a>0$. Entonces también $1/a>0$, y multiplicando por este último número obtenemos la inecuación equivalente

$$0<x+\frac{b}{a}$$

de donde, finalmente, trasponiendo

$$-b/a<x;$$

esto es: el conjunto de soluciones es el conjunto de todos los números reales x mayores que $-b/a$.

Si hubiese sido $a<0$, multiplicando de nuevo por $1/a$ y teniendo cuidado de invertir el sentido de la desigualdad, resultaría:

$$0>x+\frac{b}{a},$$

de donde se deduce el conjunto de soluciones:

$$S=\{x\in R/x<-b/a\}.$$

En cualquiera de los dos casos, el conjunto de soluciones es una semirrecta, dado que está constituido por todos los puntos de abscisa mayor (o menor) que un número dado.

Ejemplo 79

Para la inecuación $0<2x-3$, la solución es

$$x>3/2,$$

representada gráficamente por la semirrecta indicada por trazo grueso en la figura 3.37.

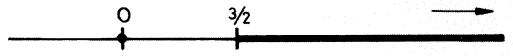


FIG. 3.37.

Ejercicio 92

Resuélvanse las inecuaciones

a) $1-x<3-4x$;

b) $\dfrac{1+3x}{2}-3<2+\dfrac{1-5x}{3}$.

13. SISTEMAS DE INECUACIONES DE PRIMER GRADO EN UNA INCOGNITA

Considérense dos inecuaciones de primer grado

$$0<ax+b$$
$$0<cx+d$$

Sean S_1 y S_2 los respectivos conjuntos de soluciones. Resolver el sistema formado por las dos inecuaciones es explicitar el conjunto $S_1 \cap S_2$.

Como tanto S_1 como S_2 se pueden representar gráficamente como semirrectas, es fácil ver que solamente existen tres posibilidades para $S_1 \cap S_2$: basta ver cómo pueden estar dispuestas dos semirrectas sobre una recta.

I) Las dos semirrectas tienen el mismo sentido. La intersección de las dos coincide con una de ellas.

Ejemplo 80

Considérese el sistema

$$0<2x-3$$
$$0<3x+1$$

Aquí se tiene:

$$S_1=\{x \in R/x>3/2\}$$
$$S_2=\{x \in R/x>-1/3\}$$

De la representación gráfica se desprende que S_1 está contenido en S_2, por lo que

$$S_1 \cap S_2=S_1.$$

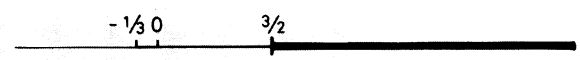


FIG. 3.38.

La solución del sistema es, pues,

$$x>3/2$$

II) Las dos semirrectas tienen sentidos opuestos. En este caso pueden ocurrir dos cosas. O no tienen punto en común, con lo que no existe solución del sistema, o tienen puntos comunes que forman un intervalo. Esto agota las posibilidades.

Ejemplo 81

Resuélvase el sistema

$$\begin{cases} 0<x-1 \\ 0<1-2x \end{cases}$$

Los conjuntos de soluciones son

$$S_1=\{x \in R/x>1\}$$
$$S_2=\{x \in R/x<1/2\}$$

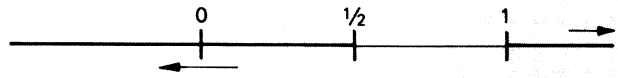


FIG. 3.39.

Ambos conjuntos son claramente disjuntos, por lo que el sistema carece de solución

Ejemplo 82

Resuélvase

$$\begin{cases} 3x-2<0 \\ x+2>0 \end{cases}$$

En este caso,

$$S_1=\{x \in R/x<2/3\}$$
$$S_2=\{x \in R/x>-2\}$$

Observando la figura se observa que

$$S_1 \cap S_2=\{x \in R/-2<x<2/3\}$$

y el conjunto solución viene representado por los puntos de un intervalo.

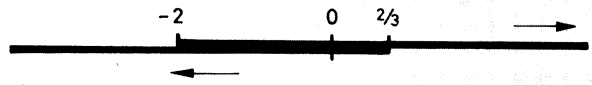


FIG. 3.40.

Existen tipos de inecuaciones en una incógnita, ya no de primer grado, cuya solución se puede reducir a sistemas de dos o más ecuaciones de primer grado. Por ejemplo, una inecuación como la siguiente:

$$(1-2x)\cdot(3+x)>0$$

puede reducirse a los dos sistemas

$$\left.\begin{matrix} 1-2x>0 \\ 3+x>0 \end{matrix}\right\} \quad \text{y} \quad \left\{\begin{matrix} 1-2x<0 \\ 3+x<0 \end{matrix}\right.$$

ya que para que el producto de las expresiones en cada paréntesis sea positivo basta con que, o ambas sean positivas, o ambas negativas.

Ejercicio 93

Resuélvase el sistema

$$\left\{\begin{matrix} 1-x<2-3x \\ 3+x<2+5x \end{matrix}\right.$$

Ejercicio 94

Resuélvase la inecuación

$$(1-x)\cdot(x+2)\cdot(2-3x)>0.$$

14. INECUACION DE PRIMER GRADO CON DOS INCOGNITAS

Sea $ax+by+c$ un polinomio de primer grado en x, y, y considérese la inecuación

$$0<ax+by+c.$$

Intentemos hallar el conjunto de pares (x, y) que satisfacen a la inecuación dada. Considerando al par (x, y) como coordenadas de un punto del plano, hay que buscar la región del mismo cuyos puntos verifican

$$ax+by+c>0.$$

Para ello consideremos la ecuación

$$ax+by+c=0.$$

Ya se sabe que el conjunto de soluciones de la misma viene representado por los puntos de una recta, que no es otra que la gráfica de la aplicación afín

$$x \to y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b},$$

obtenida despejando y en la ecuación dada.

Concretándonos a un ejemplo, sea la inecuación $2x-3y+1>0$. Trasponiendo el término $3y$ al segundo miembro, y dividiendo por 3, llegamos a

$$y<\frac{2x+1}{3}.$$

Si se dibuja la recta representativa de la función afín

$$y=\frac{2x+1}{3},$$

se observa que los puntos (x, y) del plano que satisfacen la inecuación dada son aquellos en los que la ordenada y es menor que el valor correspondiente

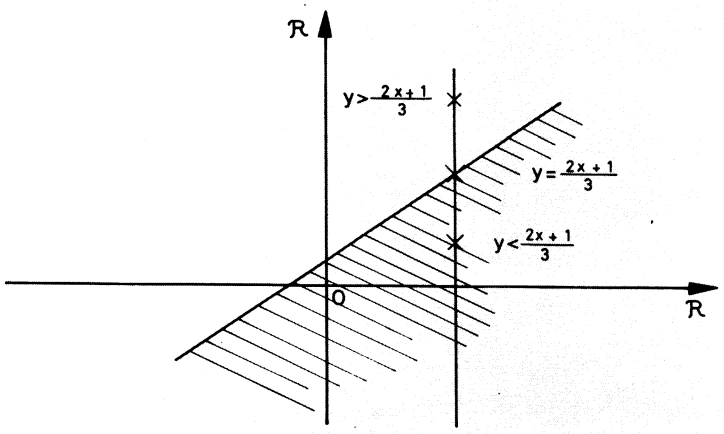


FIG. 3.41.

de la función afín para la x de que se trate. De manera que todos los puntos del semiplano rayado son solución de la inecuación propuesta, y son los únicos.

Enunciemos el resultado:

El conjunto de puntos (x, y) soluciones de la inecuación

$$ax+by+c>0$$

es un semiplano de los dos determinados por la recta representativa de la ecuación

$$ax+by+c=0.$$

Desde el punto de vista práctico resulta fácil ver cuál de los dos semiplanos es el buscado, pues basta sustituir en el polinomio $ax+by+c$ las coordenadas de un punto cualquiera de uno de los semiplanos. Si se obtiene un valor positivo, dicho semiplano es el de soluciones de $ax+by+c>0$. Si el valor es negativo, el semiplano buscado es el otro.

Ejemplo 83

Señálese el semiplano que constituye el conjunto de soluciones de la inecuación

$$2x + 3y - 12 > 0.$$

Solución: La recta $2x + 3y - 12 = 0$ pasa por los puntos

$$A(0, 4) \quad \text{y} \quad B(6, 0).$$

Una vez dibujada, se observa que el origen $(0, 0)$ está en uno de los semiplanos.

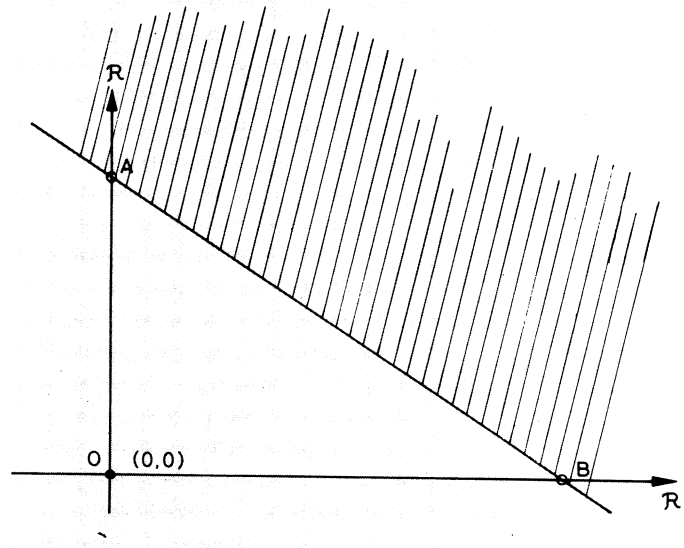


FIG. 3.42.

Como el valor que toma $2x + 3y - 12$ en $(0, 0)$ es -12, el semiplano que contiene las soluciones de la ecuación es aquel que no contiene el origen (figura 3.42).

Ejercicio 95

Hágase una representación análoga del semiplano de soluciones de la inecuación

$$1 - x - y > 2x - 3y + 4.$$

15. SISTEMAS DE INECUACIONES CON DOS INCOGNITAS

De lo anterior se desprende que cuando se tienen varias inecuaciones de primer grado con dos incógnitas y se intenta hallar el conjunto de soluciones comunes a todas ellas, tal conjunto será una región del plano obtenida como intersección de los semiplanos-solución de cada una de las inecuaciones. El estudio completo de todas las posibilidades es complicado. Baste indicar que cuando son dos las inecuaciones, la región del plano que resulta es siempre ilimitada, pero a partir de tres inecuaciones puede ocurrir que el conjunto solución sea el interior de un polígono.

Ejemplo 84

El conjunto de soluciones del sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ 1 - x - y > 0 \end{cases}$$

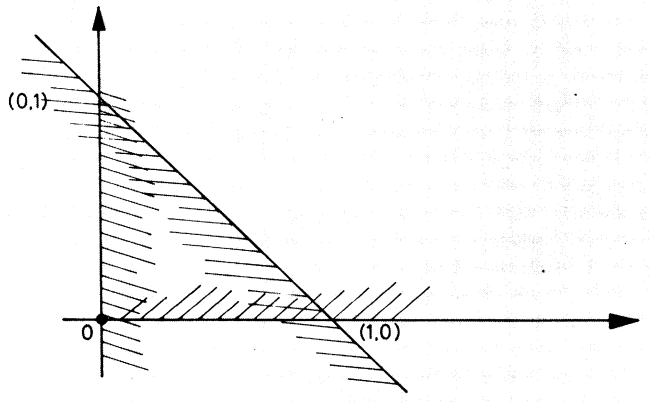


FIG. 3.43.

se obtiene en seguida sin más que rayar los semiplanos donde están las soluciones de cada inecuación. Resulta ser el interior del triángulo de vértices

$$A(0, 0), \quad B(1, 0) \quad \text{y} \quad C(0, 1).$$

Hasta aquí se ha estado suponiendo que las desigualdades eran estrictas. No obstante, se pueden considerar también inecuaciones de la forma

$$ax + by + c \geqslant 0.$$

Obviamente, el conjunto de soluciones de una de este tipo consistirá en un semiplano junto con los puntos de la recta que lo define.

Ejercicio 96

Hállese gráficamente la región del plano cuyos puntos (x, y) verifican el sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} x+y \geqslant 0 \\ 2x-3y+1>0 \\ x \leqslant 4 \end{cases}$$

16. PROGRAMACION LINEAL

Como aplicación de lo anterior se va a dar una brevísima noción del tipo de problemas que aborda la «programación lineal».

Para ello, partamos del siguiente problema concreto:

Una papelería situada junto a un colegio vende alrededor de ochenta cuadernos a la semana, de dos tipos distintos, que llamaremos G (grande) y P (pequeño). El cuaderno de tipo G le cuesta 30 pesetas y lo vende a 37, mientras que el de tipo P le cuesta 22 pesetas y lo vende a 28. Si el dueño no quiere invertir en cuadernos más de 2 000 pesetas semanales, ¿cuántos deberá comprar de cada tipo para que su ganancia sea máxima? (Admítase que no pide más de ochenta.)

Al analizar este problema obsérvese que de forma natural surgen desigualdades lineales. En efecto: Si se llama x al número de cuadernos de tipo G e y al número de cuadernos de tipo P, como no pide más de ochenta se tiene

$$x+y \leqslant 80.$$

Por otra parte, lo que ha de pagar por los cuadernos es $30x+22y$, cantidad que no debe superar las 2 000 pesetas, de forma que se tiene la nueva inecuación

$$30x+22y \leqslant 2\,000.$$

Además, existen otras dos inecuaciones que, de obvias que resultan, pueden olvidarse. Son las que nos dicen que tanto x como y deben ser positivos

$$x \geqslant 0 \quad ; \quad y \geqslant 0.$$

Dibujando la región del plano definida por las cuatro inecuaciones se obtiene el cuadrilátero de la figura, incluidos los puntos de los lados desde el momento en que las inecuaciones no son desigualdades estrictas (el signo utilizado es $\leqslant$).

Ahora de lo que se trata es de hallar el o los puntos de la región obtenida que hacen máxima la ganancia del librero, que es

$$7x + 6y \text{ pesetas},$$

ya que por cada uno de los x cuadernos de tipo G gana 7 pesetas, y por cada uno de los y cuadernos de tipo P gana 6 pesetas.

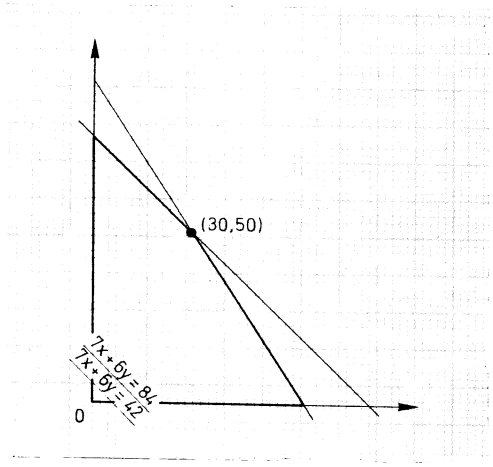


FIG. 3.44.

Si se traza la recta $7x + 6y = 42$, pongamos por caso, los puntos situados sobre ella dentro de la región corresponden a las distintas posibilidades de venta de x cuadernos G e y cuadernos P, que dejan globalmente una ganancia de 42 pesetas. Cambiando el valor de la ganancia de 42 a otro cualquiera, los puntos situados sobre la nueva recta que estén dentro de la región dan las posibles combinaciones de ventas para la nueva ganancia. Si ésta era de 84 pesetas, por ejemplo, se puede lograr con doce cuadernos tipo G y ninguno de tipo P, o con seis de tipo G y siete de tipo P, etc.

En la figura 3.44 se han representado las dos rectas, y como lo único que varía en ellas es el término independiente, las dos son paralelas. Al ir aumentando el valor de la ganancia, la recta se desplaza paralelamente a sí misma. Entonces el valor máximo se alcanzará en un punto tal que sea el último de la región en ser alcanzado por la recta aludida en su traslación paralela. En el ejemplo propuesto es el punto (30,50), siendo el beneficio de 510 pesetas.

Como se observa, el máximo se alcanza en un vértice del cuadrilátero. Este hecho es general.

Este tipo de problemas tiene un interés práctico muy grande. Desgraciadamente, en el momento en que el número de incógnitas crece no es posible utilizar esta forma de resolución gráfica, y la analítica se complica lo suficiente como para que haya que introducir nuevas técnicas.

Ejercicio 97

Hállese el valor máximo de $3x+4y$ *cuando* x *e* y *están sometidos a las siguientes restricciones:*

$$4x+7y\leqslant 313$$
$$8x+5y\leqslant 347$$
$$x\geqslant 0, \qquad y\geqslant 0.$$

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 3.4

74. $(0, 5/2)$, $(2, -1/2)$.

75. Pasa por los puntos $(3, 1)$ y $-1, -2)$.

76. Pasa por $(0, 3)$ y $(6, 0)$.

77. *a)* $(-1, -1/4)$;
b) $(2, 2)$.

78. $(x, y)=(12/13, 36/13)$.

79. $(x, y)=(2, -1)$.

80. *a)* $(x, y)=(25/14, 6/14)$.
b) $(x, y)=(-27, 32)$;
c) $(x, y)=(-244/11, -828/11)$.

81. Uno 3 y otro -2.

82. $(x, y)=(5/3, 16/9)$.

83. $(x, y)=(-22/9, 25/9)$.

84. $(x, y)=(5, -7/15)$.

85. $(x, y)=(-27/7, -1/7)$.

86. Resolviendo se llega a

$$x=(-2m-2)/(1-m^2); \qquad y=(m^2-2m-3)/(1-m^2),$$

con tal de que $1-m^2\neq 0$. Para todo valor de $m\neq\pm 1$, el sistema tiene solución única. Para $m=1$ (escríbase) es imposible, y para $m=-1$ (escríbase) admite una infinidad de soluciones.

87. $(x, y)=(3, 2)$.

88. Dos soluciones: $(4, 3)$ y $(3, 4)$.

89. $(x, y)=(3, 2)$.

90. Dos soluciones: $(0, 0)$ y $(2/5, 4/5)$.

91. $(x, y, z)=(-1/4, 5/4, 3/4)$.

92. *a)* $x<2/3$; *b)* $x<29/19$.

93. $S=\{x \in R \,/\, 1/4<x<1/2\}$.

94. El conjunto de soluciones es

$$S=\{x \in R \,/\, -2<x<2/3\} \cup \{x \in R/x>1\}$$

y resulta ser un intervalo junto con una semirrecta.

95. Véase la figura 3.42.

96. Consúltese la figura 3.43.

97. El máximo es 196, alcanzado en el punto $(x, y)=(24, 31)$.

3.5

Ejercicios y problemas de recapitulación

1. ¿Qué tipo de número es el producto de un racional por un irracional? ¿Hay algún caso excepcional?

2. La suma de un número racional y otro irracional, ¿cómo es?

3. Los griegos dieron como valor aproximado de π el número racional 22/7. Determínense varias aproximaciones decimales de 22/7 y compruébese cuánto se aproximan a las de π. Hágase lo mismo para el número 355/113.

4. Calcúlese, expresando el resultado final en forma de radical:

$$\frac{(2^{1/3} \times 3^{-1/2})^5}{3^3 \times 2^{2/5}}.$$

5. Racionalícese:

a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}$; *b)* $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

6. Opérese

$$\sqrt{27}-\sqrt{48}+\sqrt{147}.$$

7. Un foco $F(4, 8)$ emite un rayo lumínico que, tras reflejarse en la recta especular (=espejo) $x+y=6$, pasa por el punto $A(8, 2)$.

Determínese el punto en que el rayo de luz incide sobre la recta y calcúlese el camino recorrido por el rayo desde F hasta A.

8. Se establecen las igualdades

$$\begin{aligned} x+y&=a \\ xy&=b \end{aligned}$$

Calcúlese, primero, x^2+y^2, y luego, x^4+y^4, en función de a y b. Finalmente, resuélvase el sistema

$$\left.\begin{array}{l} x+y=2 \\ x^4+y^4=34 \end{array}\right\}$$

usando los cálculos anteriores.

9. Resuélvase la ecuación $8x^3-12x+3=0$, sabiendo que sus tres raíces forman progresión aritmética.

10. Determínense m y n en la ecuación $x^3+mx^2+nx+15=0$, sabiendo que dos de sus raíces son 3 y 5. Calcúlese su tercera raíz.

11. Determínense los valores de k para los que el trinomio

$$(k-2)x^2+2(2k-3)x+5k-6$$

es positivo.

12. Se sabe que las ecuaciones $x^3-3x+2=0$ y $x^3-7x-6=0$ tienen una solución común. Resuélvanse ambas ecuaciones.

13. Analícese la función $y=x^2+2$

a) dominio y recorrido;
b) puntos de corte con los ejes;
c) valores extremos;
d) clasificación de la función;
e) dibujo de su gráfica;
f) dibujo de la gráfica de su posible función inversa;
g) establecimiento de su inversa; calificarla.

14. Una ecuación de segundo grado tiene por soluciones el opuesto y el inverso de 2. Reconstrúyase.

15. Utilizando papel milimetrado, resuélvase gráficamente el sistema

$$\begin{array}{l} 6x+7y=126 \\ 8x-9y=-48; \end{array}$$

16. Resuélvanse los siguientes sistemas de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{3x}{2}-4y=25 \\ \dfrac{x-y}{2}+y=8 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} 5x-\dfrac{1-x-2y}{4}+3=-\dfrac{x-y}{3} \\ \dfrac{x}{4}-\dfrac{2y}{3}=2x-y \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}=\dfrac{2\sqrt{5}y}{\sqrt{5}-1} \\ x+y=2\sqrt{5} \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} 6x+\dfrac{2x-5y}{7}=30 \\ 8x-\dfrac{5x-2y}{3}=33 \end{array}\right\}$$

17. En una caja hay piezas cuadradas con dos y cuatro remaches, y redondas de dos remaches. En total, se cuentan ochenta y dos piezas y doscientos veinte remaches. Determínese el número de cada clase de piezas, sabiendo que hay doble número de piezas cuadradas con cuatro remaches que de redondas con dos remaches.

18. En un monedero se tienen doce monedas de sólo dos tipos: de 5 y de 25 pesetas. Si todas las menores fueran las mayores, y viceversa, la cantidad sería cuatro quintos de la inicial.

Determínese el número de monedas de cada clase, así como la cantidad de dinero que contiene el monedero.

19. Determínense los coeficientes del trinomio ax^2+bx+c, sabiendo que para $x=-3$ toma el valor 1; para $x=-1$, es -3 y que el punto $(3, 5)$ pertenece a su gráfica cartesiana.

20. Resuélvase el sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} (4x-3)\cdot(2x-1)>0 \\ 3x+4>0 \\ 4x^2-9>0 \end{cases}$$

21. ¿Para qué valores de m admite solución el siguiente sistema de ecuaciones?

$$\begin{cases} x+y=3 \\ mx-y=9 \\ 3x+my=4m+2 \end{cases}$$

22. Una empresa fabrica dos tipos de tocadiscos, a los que nos referiremos como A y B. La capacidad de producción de la fábrica es de noventa tocadiscos diarios, todos los cuales tienen salida. El número de obreros es de veinticinco, y su jornada de trabajo es de ocho horas.

El tocadiscos tipo A requiere para su montaje dos horas y media de trabajo de un productor, mientras que el de tipo B sólo necesita hora y media. La ganancia neta de la empresa en cada tocadiscos de tipo A es de 1 000 pesetas, y de 700 en el de tipo B. Hállense el número de unos y de otros que se deben fabricar para obtener el máximo beneficio, y calcúlese éste.

3.6

Autoevaluación A-3

1. Sólo una de las cuatro columnas que se proponen están formadas por $x \in Q$. Márquese.

a)	*b)*	*c)*	*d)*
3,5	$\pi/\sqrt{\pi}$	13/17	$1/\pi$
$2,\widehat{9175}$	3,5	$0,\widehat{3}$	22/7
1/17	$0,\widehat{3}$	22/7	0,66...
$\pi/2$	22/7	$\sqrt{3/27}$	$-2/3$

2. La diferencia $1-0,\widehat{9}$ es:

a) 0,1; *b)* cero; *c)* 0,00...1; *d)* 0,1...

3. El número $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ es

a) radical;
b) racional;
c) ha de operarse;
d) irracional.

4. Entre los racionales a/b y c/d existe

a) sólo el racional $\dfrac{a/b+c/d}{2}$;
b) un número ilimitado de ellos;
c) depende de que estén más o menos separados;
d) sólo números reales.

5. La radicación de índice 2 se puede considerar como una aplicación de los reales positivos en los reales. Esta aplicación es

a) inyectiva;
b) es que no es aplicación;

c) exhaustiva;
d) biyectiva.

6. La expresión simbólica $a^{-n/p}$, con n y p primos entre sí, representa:

a) un radical;
b) hay que racionalizar para saberlo;
c) una potencia inversa;
d) un racional negativo.

7. Si se reúne el conjunto de los radicales con Q, se consigue:

a) el conjunto real;
b) el conjunto de los irracionales;
c) una extensión de Q;
d) faltan números.

8. La función polinómica de variable real $y=\frac{1}{x}$ es:

a) de primer grado;
b) no es función polinómica;
c) representa una parábola;
d) es de grado 2; $y \cdot x = 1$.

9. La función lineal asociada a la afín $y=ax+b$ es:

a) $y=-ax-b$;
b) $y=ax-b$;
c) $y=ax$;
d) $x=ay+b$.

10. La función afín del número anterior tiene su gráfica que pasa por el punto

a) $(b, 0)$; *b)* $(0, b)$; *c)* (b, c); *d)* $(-b, 0)$.

11. De las cuatro proposiciones que siguen, sólo una es falsa. Descúbrala.

a) Toda función uniforme es aplicación.
b) Una correspondencia que tiene los pares $(2, 3)$ y $(2, -3)$ es función uniforme.
c) Si la función $f: R \to R$ es unívoca, $f(a)=f(b) \Longrightarrow a=b$.
d) La función $y^2=x$ es multiforme.

12. Una parábola con eje de simetría paralelo al de ordenadas, representa una función de la forma

a) $x=ay^2+by+c$;
b) $y=ax^2+bx+c$;
c) $xy=1$;
d) $(x-a)(x-b)=y^2$.

13. Si el conjunto imagen de la función $f: A \to B$ es unitario, es que se trata de

a) una función afín;
b) una función lineal;
c) una función constante;
d) una función idéntica.

14. Si sucede que $\forall x \in A$, $f(x)=x$, es que la función es:

a) de primer grado;
b) lineal;
c) constante;
d) idéntica.

15. Si se dibujan las gráficas de dos funciones inversas,

a) resultan paralelas al eje de ordenadas;
b) son simétricas respecto del eje de abscisas;
c) son simétricas respecto de la primera bisectriz;
d) son simétricas respecto del eje de ordenadas.

16. Al componer las funciones f y g, se consigue la función $y=x$. Se puede asegurar entonces que:

a) se trata de funciones constantes;
b) eran funciones lineales;
c) son funciones idénticas;
d) son funciones inversas;

17. Si sucede que el discriminante del trinomio de segundo grado es $\Delta<0$, es que

a) la gráfica no corta al eje de abscisas;
b) el trinomio es negativo;
c) pasa por el origen;
d) no es posible en los números reales.

18. El trinomio ax^2+bx+c, con $a<0$,

a) tiene un mínimo en $-b/2a$;
b) tiene un máximo en $-b/2a$;
c) no tiene ni máximo ni mínimo;
d) depende del signo de b.

19. La suma de las inversas de las soluciones de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ es igual a:

a) $-b/a$;
b) $-b/c$;
c) b/c;
d) a/b.

20. Si en la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$, $b<0$ y $c>0$,

a) las dos raíces son opuestas;
b) las dos raíces son negativas;
c) las dos son positivas;
d) no tiene solución en R.

21. Si en la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$, $b=0$, entonces

a) no tiene soluciones reales;
b) sus dos soluciones son inversas;
c) sus dos soluciones son recíprocas;
d) sus dos soluciones son opuestas.

22. Las ecuaciones $x-1=2$ y $(x-1)^2=4$

a) son equivalentes;
b) son parcialmente equivalentes;
c) tienen las mismas soluciones;
d) son de igual grado.

23. Un sistema de ecuaciones lineales, formado por dos ecuaciones de coeficientes proporcionales,

a) tiene solución única;
b) tiene dos soluciones;
c) tiene infinidad de soluciones;
d) es un sistema imposible.

24. En un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas, son en la segunda dobles de los opuestos de los de la primera, y los términos independientes coinciden. Se puede asegurar entonces:

a) que el sistema tiene una solución;
b) que es imposible;
c) que tiene infinitas soluciones;
d) que las dos soluciones son opuestas y dobles.

25. Al multiplicar por -2 todos los coeficientes de una ecuación lineal con dos incógnitas se obtiene otra, cuya «representación gráfica»

a) es paralela a la de la primera;
b) es paralela a distancia -2, de la primera;
c) coincide con la de la primera;
d) tienen sólo dos puntos comunes.

26. Inecuación es:

a) una ecuación con los signos $>$ o $<$:
b) una desigualdad entre dos funciones;
c) un semiplano;
d) una desigualdad de imágenes.

27. El conjunto de soluciones de la inecuación $ax+by+c\geqslant 0$ viene representado por:

a) todos los puntos del semiplano «superior» de borde $ax+by+c=0$;
b) todos los puntos del semiplano «inferior» de borde $ax+by+c=0$;
c) los puntos del borde común;
d) los puntos del semiplano «superior» y los del borde $ax+by+c=0$.

28. Calcúlese

$$\frac{\sqrt{2}\cdot 2^{-1/2}\cdot 3^{1/3}}{3^{-1/3}\cdot \sqrt[3]{9}}.$$

29. Efectúe y exprese el resultado en forma de potencia de exponente racional

$$\frac{\sqrt{a}\cdot \sqrt[3]{b}}{\sqrt{ab}}.$$

30. Opérese:

$$\frac{3}{2}(\sqrt{27}+\sqrt[4]{729}-\sqrt{75}).$$

31. Determínese y represéntese la gráfica de la función inversa de la función

$$y=2x+3.$$

32. Represéntese la función cuadrática $y=(x-3)^2+1$.

33. Determínese la ecuación de segundo grado cuyas raíces son el opuesto y el inverso de $\sqrt{2}$.

34. Una ecuación de segundo grado tiene dos soluciones, tales que la suma de sus inversas es 5/6. Establézcase la ecuación.

35. La ecuación $x^2-kx+k+1=0$ tiene dos soluciones, que se diferencian en una unidad. Calcúlese k.

36. Resuélvase la ecuación

$$2x-5=1+\sqrt{2x}.$$

37. Resuélvase el sistema

$$\left.\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & 4 \\ 2x- & y- & z= & -1 \\ x+2y+3z= & & & 9 \end{array}\right\}$$

38. Resuélvase la inecuación

$$2x-3>0.$$

39. Resuélvase el sistema

$$\left.\begin{aligned} 3x-2<0 \\ x+2>0 \end{aligned}\right\}$$

40. Resuélvase gráficamente el sistema

$$\left.\begin{aligned} x>0 \\ y>0 \\ x+y<1 \end{aligned}\right\}$$

FICHA-CLAVE DE LA AUTOEVALUACION A-3

1. *c).*
2. *b)*
3. *d).*
4. *b).*
5. *b).*
6. *a).*
7. *c).*
8. *b).*
9. *c).*
10. *b).*
11. *b).*
12. *b).*
13. *c).*
14. *d).*
15. *c).*
16. *d).*
17. *a).*
18. *a).*
19. *b).*
20. *c).*
21. *d).*
22. *b).*
23. *c).*
24. *b).*
25. *c).*
26. *b).*
27. *d).*

28. 1.

29. Solución: $b^{-1/6}$.

30. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

31. Véanse los ejemplos 32 y 33.

32. Véase el ejemplo 34.

33. $2x^2+\sqrt{2}x-2=0$.

34. $x^2-5x+6=0$.

35. $k=5$; $k=-1$.

36. Consúltese el ejemplo 61.

37. Véase el ejemplo 77.

38. Compárese con el ejemplo 79.

39. Se resuelve en el ejemplo 82.

40. Está desarrollado en el ejemplo 84.

UNIDAD TEMATICA 4

COMPLEJOS

4.1. Clases residuales polinómicas, módulo x^2+1

1. *Introducción*
2. *Relación de congruencia en $R[x]$, módulo x^2+1*
3. *Representantes canónicos*
4. *La biyección $C \rightarrow R \times R$*
5. *Concepto de número complejo. Complejos iguales*
6. *Operaciones en C, como pares de $R \times R$*
   6.1. Adición de complejos
   6.2. Multiplicación de complejos
7. *El cuerpo de los números complejos*

4.2. Los números reales y los números complejos

1. *Isomorfismo de inmersión de R en C*
2. *Forma binómica de un número complejo*
3. *Resolución de la ecuación $x^2+1=0$*
4. *Operaciones con complejos en forma binómica*
5. *Complejos conjugados*
6. *Automorfismo de conjugación en C*
7. *Ecuaciones cuadráticas en C*
8. *Representación gráfica de los números complejos. Afijos*

4.3. Ejercicios y problemas de recapitulación

4.4. Autoevaluación A-4

4.1

Clases residuales polinómicas, módulo $x^2 + 1$

1. INTRODUCCION

En el capítulo 2.2 quedó visto el concepto de reducibilidad de polinomios, distinguiendo entre polinomios reducibles e irreducibles.

En el estudio paralelo de la divisibilidad que de Z y de $\mathcal{O}[x]$ se realizó en el capítulo 2.3 quedó de manifiesto la analogía existente entre los conceptos de

— número primo en el anillo de los enteros, y
— polinomio irreducible en un anillo de polinomios.

En efecto, los papeles que cumplen son iguales: a la descomposición de un entero en factores primos corresponde la descomposición de un polinomio reducible en producto de factores irreducibles.

Pero conviene advertir que un polinomio puede ser irreducible en el anillo de los polinomios sobre Q, es decir en $Q[x]$, y ser reducible en el anillo de los polinomios sobre los reales, es decir, en $R[x]$, como se pone de manifiesto a continuación.

Ejemplo 1

El polinomio x^2-2 es irreducible en $Q[x]$; pero

$$x^2-2=(x-\sqrt{2})\,(x+\sqrt{2}),$$

lo que indica que es posible su descomposición en $R[x]$.

Ejercicio 1

Establézcase en qué anillo son reducibles los polinomios que se facilitan y, en su caso, factorícense:

$$A(x)=x^2+4 \qquad B(x)=x^2-16$$
$$D(x)=x^3-9x \qquad P(x)=x^3-3x$$

Los polinomios que por su propia naturaleza son irreducibles son los de primer grado, pues, lógicamente, no es posible pensar en descomponerlos en producto de otros de grado menor. Pero ya en polinomios de segundo grado, aun cuando pertenezcan a $R[x]$, puede suceder que sean o no reducibles:

$x^2-1=(x+1)(x-1)$ es reducible;

x^2+1 es irreducible en $R[x]$, y no se puede descomponer en su anillo.

El objetivo de este capítulo es ampliar el cuerpo de los números reales R y llegar a un cuerpo C, que va a tener la propiedad de que todo polinomio con coeficientes en C admite una raíz en C. Consecuentemente, todo polinomio de grado mayor que 1 sobre ese cuerpo C va a ser reducible. Entonces, en el anillo de polinomios sobre C, $C[x]$, los únicos polinomios irreducibles serán los de primer grado.

2. RELACION DE CONGRUENCIA EN $R[x]$, MODULO x^2+1

Recuérdese que sobre el anillo Z se estableció en el capítulo 2.3 una relación de equivalencia, que denominábamos «congruencia», de la siguiente manera:

$$a, b \in Z, \quad a \equiv b(m \iff a-b=\dot{m} \quad (m \in Z) \wedge (m>1)$$

Es decir, dos enteros son congruentes, módulo m, si su diferencia es múltiplo del módulo.

Ejercicio 2

Determínense los posibles valores del módulo de la congruencia $2 \equiv 12(m$.

De un modo completamente análogo, se establece sobre el anillo de los polinomios $R[x]$ la relación de congruencia, módulo x^2+1, de esta manera:

$$A(x) \equiv B(x)\,(x^2+1 \iff A(x)-B(x)=\dot{\overline{x^2+1}}.$$

Ejemplo 2

Los polinomios $A(x)=2x+3$ y $B(x)=x^3-x^2+3x+2$ son congruentes, módulo x^2+1, porque

$$2x+3-(x^3-x^2+3x+2)=-x^3+x^2-x+1=(1-x)(x^2+1).$$

Su diferencia ha resultado ser múltiplo de x^2+1.

Ejercicio 3

Analícese si los polinomios

$$A(x)=x^6+7x^4-8x^3-6x^2+8x+1$$
$$B(x)=x^5+3x^4-7x^2+15x+3$$

son congruentes, módulo x^2+1.

Ejercicio 4

De los siguientes cuatro polinomios sólo hay dos congruentes. Investíguese cuáles son:

$$A(x)=x^3-3x+5 \qquad B(x)=x^4+x^2+1$$
$$C(x)=2x^5-x^3+1 \qquad D(x)=x^6+2x^4+x^3+x$$

La relación de congruencia, arriba definida sobre el anillo $R[x]$, es una relación de equivalencia. En efecto *:

A) *Reflexividad*

Para todo polinomio $A(x)$ de $R[x]$, $A(x) \equiv A(x)$, ya que

$$A(x)-A(x)=0=0\cdot(x^2+1)=\overset{\cdot}{x^2+1}$$

B) *Simetría*

Para todo par de polinomios $M(x)$ y $N(x)$ del anillo $R[x]$,

$$M(x) \equiv N(x) \iff N(x) \equiv M(x).$$

Efectivamente,

$$M(x) \equiv N(x) \iff M(x)-N(x)=A(x)\cdot(x^2+1);$$

pero, entonces,

$$N(x)-M(x)=-A(x)\cdot(x^2+1)=\overset{\cdot}{x^2+1} \iff N(x) \equiv M(x).$$

C) *Transitividad*

$$\left.\begin{array}{l} M(x) \equiv N(x) \iff M(x)-N(x)=A(x)\cdot(x^2+1) \\ N(x) \equiv P(x) \iff N(x)-P(x)=B(x)\cdot(x^2+1) \end{array}\right\} +$$

$$M(x)-P(x)=[A(x)+B(x)]\cdot(x^2+1)=\overset{\cdot}{x^2+1} \iff M(x) \equiv P(x)$$

---

* A partir de ahora, y siempre que no sea imprescindible, no escribiremos el módulo x^2+1, a fin de hacer la lectura más fluida.

Todo lo anterior, permite concluir:

> La relación de congruencia, módulo x^2+1, clasifica y parte el conjunto de los polinomios $R[x]$ en clases de equivalencia, cada una de las cuales está formada por todos los polinomios congruentes entre sí.

CONSECUENCIA: Para definir una clase de congruencia basta dar un polinomio cualquiera que pertenezca a ella, pues todos los demás polinomios de la clase se pueden obtener a partir del dado, sin más que sumarle un polinomio múltiplo del módulo x^2+1.

Ejemplo 3

La clase que contiene al polinomio $(2x+3)$ contiene a todos los polinomios $P(x)$ tales que

$$P(x)-(2x+3)=A(x)\cdot(x^2+1),$$

donde $A(x)$ es un polinomio arbitrario.

Despejando $P(x)$, resulta:

$$P(x)=2x+3+A(x)\cdot(x^2+1).$$

Para cada $A(x)$ se obtiene un polinomio de la clase. Así, por ejemplo, si $A(x)=x$, se obtiene $P(x)=x^3+3x+3$; para $A(x)=1-x^2$, resulta

$$P(x)=-x^4+2x+4, \text{ etc.}$$

3. REPRESENTANTES CANONICOS

El polinomio $(2x+3)$ del ejemplo anterior se dice que es un representante de la clase de equivalencia a la que pertenece, pues, de hecho, la representa al dejarla del todo determinada. Otros representantes de esa misma clase pueden ser los polinomios

$$T(x)=x^3+3x+3; \qquad S(x)=-x^4+2x+4.$$

Ejercicio 5

De la clase de congruencia cuyo representante es el polinomio x^2-2x+2, *hállense:*

a) *dos elementos que sean polinomios de tercer grado;*
b) *un elemento que sea polinomio de primer grado. ¿Se pueden hallar dos distintos?*

Ejercicio 6

Los polinomios escritos a continuación pertenecen a tres clases de congruencias. Agrúpense en ellas y obténgase para cada una un representante de tercer grado.

$$(x^2-1);\quad (x^3+2);\quad (-2);\quad (-x+2);\quad (x^4+x^3+1);\quad (x^2-x-1)$$

Como se ha visto en el ejemplo 3, es posible tomar como representantes de una clase polinomios de diversos grados. Por otro lado, es fácil ver que en una clase cualquiera existen polinomios de grado tan grande como se quiera.

Pero, ¿y de grado mínimo? ¿Pueden existir en una clase polinomios de grado cero (constantes)? ¿Y de primer grado?

La respuesta a estas cuestiones es todavía mejor de la que cabría esperar, porque:

> TEOREMA: En cada clase de congruencia hay un único polinomio de grado menor que dos.
> (De grado 1, de grado 0 o el polinomio nulo.)

DEMOSTRACIÓN: Sea $P(x)$ un representante de la clase. Al dividir por el módulo x^2+1, se obtiene:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & x^2+1 \\ \hline D(x) & C(x) \end{array}$$

$$\text{polinomio dividendo} = \text{polinomio divisor} \times$$

$$\times \text{ polinomio cociente} + \text{polinomio resto}$$

$$P(x) = (x^2+1)\cdot C(x) + D(x)$$

Pero el resto es siempre de grado menor que el divisor, luego, a lo más, $D(x)$ es de grado 1, siendo su forma general

$$D(x) = a + bx;$$

por lo que

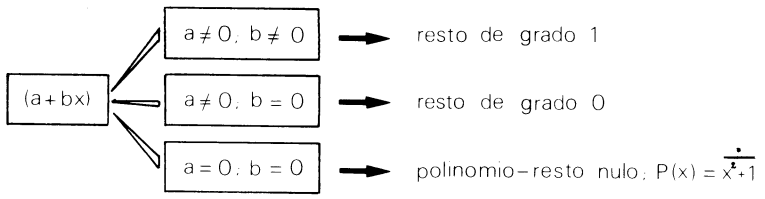
$$P(x) = (x^2+1)\cdot C(x) + (a+bx);$$

$$P(x) - (a+bx) = (x^2+1)\cdot C(x) = \overset{\cdot}{(x^2+1)}.$$

El último resultado evidencia que $P(x)$ y $(a+bx)$ pertenecen a la misma clase de congruencia, y que es posible tomar a $(a+bx)$ como representante de ella.

Este polinomio $(a+bx)$ de cada clase es único, por ser resto de una división de polinomios de divisor fijo, x^2+1.

Las tres posibilidades de grado del resto, expresadas en el teorema, se indican en el siguiente cuadro:



Ejemplo 4

Sean tres clases de congruencia, tres de cuyos respectivos representantes son:

$$x^2-3x+7$$
$$x^4+1$$
$$x^4-1$$

Al dividir cada uno de estos tres polinomios por el módulo x^2+1 se obtiene:

$$\begin{array}{r|l} x^2-3x+7 & x^2+1 \\ \hline -x^2\quad -1 & 1 \\ \hline -3x+6 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x^4\quad +1 & x^2+1 \\ \hline -x^4-x^2 & x^2-1 \\ \hline -x^2+1 & \\ x^2+1 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

No es necesario efectuar la división del tercer polinomio dado para descubrir el resto, ya que $x^4-1=(x^2+1)(x^2-1)$. Al ser múltiplo del módulo, el resto es cero.

DEFINICIÓN: El único polinomio de grado menor que 2 que existe en cada clase de congruencia se llama «representante canónico de la clase».

La clase de representante canónico $a+bx$ se la representa por el par de reales (a, b).

Ejercicio 7

Establézcase el polinomio de tercer grado más sencillo de la clase $(2, 3)$.

Ejercicio 8

Descúbrase la clase de congruencia (a, b) *a la que pertenece el polinomio*

$$x^3+4x+2.$$

Ejercicio 9

Escríbase la forma general de todos los polinomios que pertenecen a la clase de congruencia $(0, 0)$.

Ejercicio 10

Justifíquese si son o no son congruentes, módulo x^2+1, *los polinomios*

$$A(x)=x^5+2x^3+2x+2$$
$$B(x)=x^5+x^3+x+2.$$

Determínese la clase a que pertenecen.

4. LA BIYECCION $C \to R \times R$

Es importante señalar que la representación de cada clase de congruencia $(a+bx)$ en la forma (a, b) establece una correspondencia biunívoca entre el conjunto de esas clases de congruencia, que denotamos C, y el conjunto de pares ordenados de números reales, que no es más que el cartesiano $R \times R$ (Fig. 4.1).

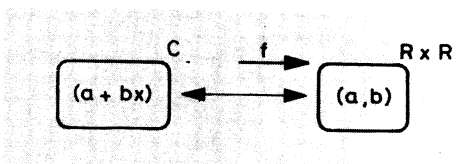


FIG. 4.1.

Esta biunivocidad (biyección) es clara, pues a cada clase le corresponde un único representante canónico $(a+bx)$ y, por tanto, un único par (a, b); y, recíprocamente, dado el par (a, b), queda determinado un único polinomio $(a+bx)$ y, con él, una sola clase, la que contiene a él y a todos los polinomios relacionados con él.

Un poco más adelante veremos que esta biyección «respeta» la adición y multiplicación y, por tanto, se trata de un *isomorfismo,* cosa muy importante porque facilita extraordinariamente los cálculos.

5. CONCEPTO DE NUMERO COMPLEJO. COMPLEJOS IGUALES

DEFINICIÓN: Se denomina «número complejo» a cada una de las clases de congruencia, módulo (x^2+1), del conjunto de los polimios, $R[x]$.
Lo denotamos C.

El llamar «número» a cada una de esas clases de equivalencia es del todo lícito. Los números son entes matemáticos con los que se pueden realizar operaciones. Con los números complejos así establecidos se puede trabajar con las operaciones que en el número siguiente se describen.

Establecido un conjunto numérico, antes de nada es necesario crear una relación de igualdad entre sus elementos. Procede establecer, pues, la relación de igualdad en el conjunto de los números complejos, C.

$(a, b) \in C \quad (a', b') \in C,$

$$(a, b) = (a', b') \iff (a = a') \wedge (b = b').$$

Dos complejos son iguales si, y solamente si, sus componentes correspondientes lo son.

Efectivamente:

— un número complejo es una clase de congruencia;
— dos complejos son iguales, si sus clases coinciden;
— los representantes canónicos son únicos;
— dos complejos son iguales si sus canónicos son idénticos.

Ejemplo 5

El polinomio $x^3 - x^2 + 4x + 1$ pertenece al complejo $(2, 3)$ porque

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 + 4x + 1 & x^2 + 1 \\ \cline{2-2} -x^3 \quad - x & x - 1 \\ \cline{1-1} -x^2 + 3x + 1 & \\ +x^2 \quad +1 & \\ \cline{1-1} 3x + 2 & \end{array}$$

$$x^3 - x^2 + 4x + 1 = (x^2 + 1)(x - 1) + (3x + 2)$$

$$(x^3 - x^2 + 4x + 1) - (3x + 2) = \overset{\bullet}{x^2 + 1}.$$

Obsérvese cómo en toda división el dividendo y el resto son congruentes, módulo, el divisor.

Ejercicio 11

Determinar si los polinomios $A(x) = x^3 + 2x + 1$ *y* $B(x) = x^4 + x^2 + x + 1$ *pertenecen al mismo complejo y, si es así, expresarle.*

Ejercicio 12

Determinar k *en el polinomio* $A(x) = x^3 + x^2 + 2x + k$, *sabiendo que pertenece al número complejo* $(2, 1)$.

6. OPERACIONES EN C, COMO PARES DE $R \times R$

6.1. Adición de complejos

Se define la adición de complejos mediante la aplicación

$$\begin{array}{c} C \times C \xrightarrow{\quad + \quad} C \\ [(a, b), (c, d)] \longrightarrow (a + c, b + d) \end{array}$$

que hace corresponder a cada par de complejos del cartesiano $C \times C$ otro complejo, llamado «suma», cuyas componentes son la adición de las componentes correspondientes de los complejos sumandos.

Ejemplo 6

$$(-2, 4) + (5, 1/2) = (-2 + 5, 4 + 1/2) = (3, 9/2)$$
$$(3, 2) + (-3, 1) = (0, 3)$$

Propiedades de la adición de complejos

A partir de la definición establecida es fácil demostrar que la adición de complejos tiene las siguientes propiedades:

I. Asociatividad:

$$(a, b) + [(c, d) + (e, f)] = [(a, b) + (c, d)] + (e, f).$$

II. Existencia de elemento neutro:

$$\forall (a, b), \quad (a, b) + (0, 0) = (0, 0) + (a, b) = (a, b).$$

III. Todo complejo (a, b) posee un opuesto $(-a, -b)$:

$$\forall (a, b), \quad (a, b) + (-a, -b) = (0, 0).$$

IV. Conmutatividad:

$$(a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b).$$

Por cumplir las propiedades enumeradas, se puede enunciar

> La adición dota a C de estructura de grupo abeliano

Ejercicio 13

Compruébese que se verifica la propiedad asociativa en la adición de complejos, calculando primero

$$(1, 1/2) + [(3, -1/4) + (2, -5)]$$

y luego

$$[(1, 1/2)+(3, -1/4)]+(2, -5).$$

Ejercicio 14

Demuéstrese la propiedad asociativa de la adición de complejos, comprobando los resultados finales de los dos cálculos

$$(a, b)+[(c, d)+(e, f)]$$

y

$$[(a, b)+(c, d)]+(e, f),$$

utilizando al final el hecho de que la suma de reales es asociativa.

6.2. Multiplicación de complejos

Se define la multiplicación de complejos mediante la aplicación

$$\begin{array}{ccc} C\times C & \xrightarrow{\times} & C \\ [(a, b), (c, d)] & \longrightarrow & (ac-bd, ad+bc). \end{array}$$

Parecerá sumamente artificiosa la definición en la formación del complejo-producto. Sin embargo, tal establecimiento es razonable, como a continuación se justifica.

$(a, b)=$clase de equivalencia que contiene a $a+bx$
$(c, d)=$clase de equivalencia que contiene a $c+dx$

se define

$(a, b)\cdot(c, d)=$clase de equivalencia que contiene a $(a+bx)\cdot(c+dx)=$
$=$clase de equivalencia que contiene a $ac+(ad+bc)x+bdx^2$.

La única diferencia apreciable en relación con la adición surge del hecho de que ahora el complejo producto no viene dado por su representante canónico, sino por un polinomio de segundo grado. Pero ya se sabe la forma de proceder: el representante canónico es el resto de dividir

$$ac+(ad+bc)x+bdx^2 \text{ por } x^2+1.$$

Efectuando la división,

$$\begin{array}{rl|l} bdx^2+(ad+bc)x+ac & & x^2+1 \\ \cline{3-3} -bdx^2 & -bd & bd \\ \cline{1-2} ac-bd+(ad+bc)x & & \end{array}$$

y el complejo-producto es $(ac-bd,\ ad+bc)$. Entonces, en definitiva

> El producto de dos números complejos (a, b) y (c, d) es el número complejo
>
> $$(a, b)\cdot(c, d)=(ac-bd, ad+bc)$$

Ejercicio 15

Efectúense los siguientes productos

a) $(1, -3)\cdot(2, -1)$; *b)* $(3, 0)\cdot(0, -1)$; *c)* $(2/3, -1)\cdot(1/4, 2/3)$.

Propiedades de la multiplicación de complejos

Al igual que en la adición, es fácil justificar las siguientes propiedades de la multiplicación de complejos:

V. Asociatividad:

$$(a, b)\cdot[(c, d)\cdot(e, f)] = [(a, b)\cdot(c, d)]\cdot(e, f).$$

VI. Existencia de elemento unidad:

$$\forall (a, b),\ (a, b)\cdot(1, 0) = (1, 0)\cdot(a, b) = (a, b).$$

VII. Todo complejo (a, b), excepto el $(0, 0)$, posee inverso (a', b'):

$$(a, b)\cdot(a', b') = (1, 0).$$

Más abajo se demuestra su existencia y se calcula su valor.

VIII. Conmutatividad:

$$(a, b)\cdot(c, d) = (c, d)\cdot(a, b).$$

Ejercicio 16

Demuéstrese la propiedad conmutativa del producto.

Ejercicio 17

Demuéstrese la propiedad asociativa del producto comparando los resultados finales de calcular:

$$(a, b)\cdot[(c, d)\cdot(e, f)] \quad y \quad [(a, b)\cdot(c, d)]\cdot(e, f).$$

Utilícese el hecho de que el producto de números reales es conmutativo y asociativo, lo mismo que la adición.

Por cumplirse las cuatro últimas propiedades establecidas, se enuncia y se recuadra:

> La multiplicación dota a C^* de estructura de grupo abeliano

* Como el $(0, 0)$ no cumple la propiedad VII, ha de suprimirse ese elemento para que sea grupo multiplicativo. $C^* = C - (0, 0)$.

Antes de ver la propiedad común que liga a la adición y a la multiplicación de complejos, pasemos a demostrar la existencia y calcular el

Inverso o recíproco de un número complejo distinto del (0, 0)

Todo número complejo (a, b), distinto del $(0, 0)$, posee un inverso (a', b') tal que

$$(a, b)\cdot(a', b')=(1, 0).$$

DEMOSTRACIÓN: Vamos a probar que existe (a', b') obteniendo una expresión para él en términos de a y b.

De ser $(a, b)\cdot(a', b')=(1, 0)$ se deduce, efectuando el producto,

$$(aa'-bb', ab'+ba')=(1, 0),$$

es decir,

$$\begin{aligned} &\text{I} \quad aa'-bb'=1 \\ &\text{II} \quad ba'+ab'=0 \end{aligned}$$

Para resolver este sistema de dos ecuaciones de primer grado en a', b', basta multiplicar la primera por a, la segunda por b y sumar miembro a miembro

$$\begin{array}{l} \left.\begin{array}{ll} \text{I} & a^2a'-abb'=a \\ \text{II} & b^2a'+bab'=0 \end{array}\right\}+ \\ \hline (a^2+b^2)a' \quad =a \end{array}$$

Como se ha supuesto que $(a, b)\neq(0, 0)$, a^2+b^2 no puede ser cero, y se puede despejar a' dividiendo los dos miembros por el número no nulo a^2+b^2, obteniendo

$$a'=\frac{a}{a^2+b^2};$$

y una vez sustituido este valor de a' en la segunda ecuación se puede despejar b'

$$b'=\frac{-b}{a^2+b^2}.$$

Por tanto, el número complejo inverso del $(a, b)\neq(0, 0)$ es

$$\boxed{(a', b')=\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)}$$

Ejemplo 7

El inverso del complejo $(-1, 2)$ se halla dividiendo -1 por 5; y -2, también por 5.

De modo que

$$\text{inverso } (-1, 2) = (-1/5, -2/5).$$

Como escribir la palabra «inverso» delante del complejo es incómodo, se ha ideado un símbolo más cómodo para indicar que es inverso: poner un -1 como exponente. Así:

$$(-1, 2)^{-1} = (-1/5, -2/5).$$

Ejercicio 18

Calcúlense los inversos de los complejos

a) $(1, \sqrt{3})$; *b)* $(0, \sqrt{2})$; *c)* $(\sqrt{2}, 0)$; *d)* $(0, 0)$.

División de complejos

El hecho de que cada número complejo, distinto de $(0, 0)$, admita inverso, permite definir el cociente de dos números complejos como el número complejo que se obtiene multiplicando el dividendo por el inverso del divisor.

Ejemplo 8.

El cociente $\dfrac{(2, 3)}{(-1, 2)}$ es el producto de $(2, 3)$ por el inverso de $(-1, 2)$, calculado antes. Luego

$$\frac{(2, 3)}{(-1, 2)} = (2, 3) \cdot (-1/5, -2/5) = (4/5, -7/5).$$

Ejercicio 19

Hállense los inversos de los complejos

a) $(0, 1)$; *b)* $(3/5, 4/5)$; *c)* $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$.

Ejercicio 20

Calcúlense los cocientes

$$\frac{(4, -1)}{(0, 1)} \quad \text{y} \quad \frac{(1, 1)}{(1, -1)}.$$

7. EL CUERPO DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

Además de las ocho propiedades estructurales con que la adición y multiplicación dotan a C, una novena propiedad, común a ambas operaciones, completa la estructura. Es

IX. Distributividad de la multiplicación, respecto de la adición:

$$(a, b)\cdot[(c, d)+(e, f)]=(a, b)\cdot(c, d)+(a, b)\cdot(e, f).$$

Para justificarla, basta con efectuar ambos miembros de la igualdad establecida.

Ejercicio 21

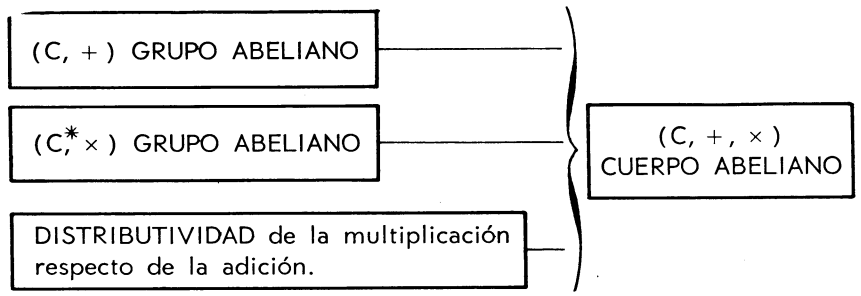
Compruébese la propiedad distributiva sobre la expresión

$$(-1, 4)\times[(2, 1)+(1/3, -2)]=$$

Al cumplirse las nueve propiedades que han quedado escritas, se concluye:

> La adición y la multiplicación dotan a C de estructura de cuerpo abeliano.

El cuadro que sigue resume de forma gráfica las características de esta estructura.



El hecho de que C tenga estructura de cuerpo permite, por ejemplo, abordar la resolución de ecuaciones de primer grado en C, del mismo modo que en los cuerpos Q o R.

Ejemplo 9

He aquí la resolución paralela de dos ecuaciones de primer grado, establecidas una en Q y otra en C:

$$3x-4=7.$$

Se compone con el opuesto de -4

$$3x-4+4=7+4.$$

Usando la asociatividad en la adición,

$$3x+(-4+4)=11.$$

Por la naturaleza de los elementos opuestos y la del neutro,

$$3x+0=11$$
$$3\cdot x=11.$$

Componiendo con el inverso de 3,

$$\frac{1}{3}\cdot 3\cdot x=\frac{1}{3}\cdot 11.$$

Usando la asociatividad en la multiplicación,

$$\left(\frac{1}{3}\cdot 3\right)\cdot x=\frac{11}{3}$$

Por la naturaleza de los elementos inversos y la del unidad,

$$1\cdot x=\frac{11}{3}$$

$$\boxed{x=\frac{11}{3}}$$

$$(1, 2)\cdot(a, b)-(3, 1)=(2, -1).$$

Se compone con el opuesto de $-(3, 1)$.

$$(1, 2)\cdot(a, b)-(3, 1)+(3, 1)=$$
$$=(2, -1)+(3, 1).$$

Usando la asociatividad en la adición,

$$(1, 2)\cdot(a, b)+[(-3, -1)+(3, 1)]=$$
$$=(5, 0).$$

Por la naturaleza de los elementos opuestos y la del neutro,

$$(1, 2)\cdot(a, b)+(0, 0)=(5, 0)$$
$$(1, 2)\cdot(a, b)=(5, 0).$$

Componiendo con el inverso de $(1, 2)$

$$\left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right)\cdot(1, 2)\cdot(a, b)=$$
$$=\left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right)\cdot(5, 0).$$

Usando la asociatividad de la multiplicación,

$$\left[\left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right)\cdot(1, 2)\right]\cdot(a, b)=(1, -2)$$

Por la naturaleza de los elementos inversos y la del unidad,

$$(1, 0)\cdot(a, b)=(1, -2)$$

$$\boxed{(a, b)=(1, -2)}$$

Ejercicio 22

Resuélvase, expresando la base axiomática de cada paso, la ecuación en C

$$(4, -1)\cdot(x, y)+(2, 3)=(1, 5).$$

Ejercicio 23

Sin necesidad de explicitar (de escribir) la base axiomática de cada paso, resuélvase la ecuación que se propone en el cuerpo de los números complejos.

$$(3, 0)\cdot(m, n)+(0, 2)=(1, 1).$$

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 4.1

1. $A(x)$ no es reducible ni en $Q[x]$, ni en $R[x]$; lo es en $C[x]$;
$B(x)=(x-4)(x+4)$, es reducible en $Z[x]$;
$D(x)=x(x+3)(x-3)$, es reducible en $Z[x]$;
$P(x)=x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$ es reducible en $R[x]$.

2. $m_1=2$; $m_2=5$.

3. $A(x)-B(x)=(x^4-x^3+3x^2-7x-2)(x^2+1)$. Son congruentes.

4. $B(x) \equiv D(x)$.

5. *a)* $x^2-2x+2 \pm x(x^2+1)$.
b) $-2x+1$; **no.**

6. A una clase: (x^2-1) y (-2);
representante de tercer grado: (x^3+x^2+x-1);
a otra clase: (x^3+2); $(-x+2)$; (x^4+x^3+1);
a otra: (x^2-x-1);
representante de tercer grado: (x^3-2).

7. x^3+4x+2.

8. $(2, 3)$.

9. $A(x)\cdot(x^2+1) \equiv (0, 0)$.

10. **Sí.** $A(x) \equiv B(x) \equiv (2, 1)$.

11. **Sí.** Pertenecen al complejo $(1, 1)$.

12. $k=3$.

13. $(6, -19/4)$.

14. Basta calcular como el del ejercicio 13.

15. *a)* $(-1, -7)$; *b)* $(0, -3)$; *c)* $(5/6, 7/36)$.

16. Opérense ambos miembros por separado y aplíquese la conmutatividad en R.

17. Es suficiente operar por separado ambos miembros y atender a la recomendación que se facilita.

18. *a)* $(1/4, -\sqrt{3}/4)$;
b) $(0, -\sqrt{2}/2)$;
c) $(\sqrt{2}/2, 0)$;
d) no tiene.

19. *a)* $(0, -1)$;
b) $(3/5, -4/5)$;
c) $(1/2, -1/2\sqrt{3})$.

20. *a)* $(-1, -4)$;
b) $(0, 1)$.

21. Operando de ambos modos ha de ser $(5/3, 31/3)$.

22. $(x, y)=(-6/17, 7/17)$.

23. $(m, n)=(1/3, -1/3)$.

4.2

Los números reales y los números complejos

1. ISOMORFISMO DE INMERSION DE R EN C

Intentemos desarrollar este importante punto en tres fases.

Fase A

Establezcamos la aplicación de la figura 4.2 con las siguientes características:

1) Dominio de la variable: el conjunto de los reales, R.
2) Dominio de la función: el conjunto de los complejos, C.
3) Criterio: a cada real se le hace corresponder como imagen el complejo de igual proyección primera y de proyección segunda nula:

$$a \longrightarrow f(a) = (a, 0).$$

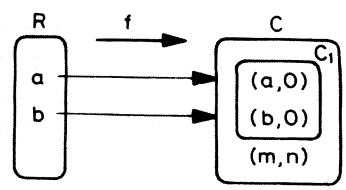


FIG. 4.2.

Esta aplicación es claramente inyectiva y, evidentemente, no sobreyectiva. En efecto,

Inyectiva:

$$\forall (a, 0) \in C, \quad \exists^* a \in R / f(a) = (a, 0).$$

No sobreyectiva: el recorrido de la función, C_1, no coincide con el conjunto final C. Hay complejos, como el $(3, 4)$, por ejemplo, que no es imagen de ningún real.

Ejercicio 24

a) *Establézcase la imagen del real* -2 *en la inyección establecida.*
b) *Determínese la antiimagen o antecedente del complejo* $(-1, 0)$.
c) *Así como* $f^{-1}(3,0) = 3$, *dígase a qué es igual* $f^{-1}(0, 7)$.

Fase B

En lugar de definir la aplicación inyectiva f de R en C, establecemos una aplicación g, similar en todo a f, excepto en una cosa: el conjunto final no es el conjunto de todos los complejos, sino un subconjunto suyo, el C_1, formado por los complejos que tienen la segunda componente nula.

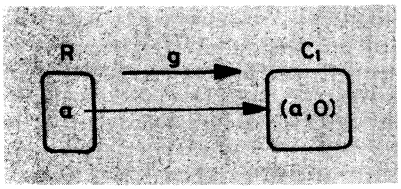


FIG. 4.3.

De este modo, la aplicación g es claramente una biyección, por ser inyectiva y exhaustiva, simultáneamente.

Fase C

Es muy fácil demostrar que el subconjunto C_1 del cuerpo de los complejos es un subcuerpo de C; es decir:

$$[C_1, +, \times] \text{ es } \textbf{cuerpo}$$

Entonces, la biyección g se puede establecer entre los cuerpos $[R, +, \times]$ y $[C_1, +, \times]$. Esta biyección goza de las siguientes propiedades:

I. La imagen de la suma de dos reales es igual a la suma de las imágenes de los sumandos:

$$g(3) + g(2) = (3, 0) + (2, 0) = (3 + 2, 0) = (5, 0) = g(5).$$

En general, si $a + b = c$

$$g(a) + g(b) = (a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) = (c, 0) = g(c).$$

II. La imagen de la multiplicación de dos reales es igual a la multiplicación de las imágenes de los factores:

$$g(4)\cdot g(5)=(4,0)\cdot(5,0)=(4\cdot 5,0)=(20,0)=g(20).$$

En general, si $a\cdot b=p$

$$g(a)\cdot g(b)=(a,0)\cdot(b,0)=(a\cdot b,0)=(p,0)=g(p).$$

Resumamos en un cuadro lo que llevamos establecido en las tres fases:

- $\left\{\begin{array}{c}[R,+,\times]\xrightarrow{g}[C_1,+,\times]\\ a\longrightarrow g(a)=(a,0)\end{array}\right\}$ es biyección.
- $g(a)+g(b)=g(a+b)$ La adición de imágenes es la imagen de la suma.
- $g(a)\cdot g(b)=g(a\cdot b)$ La multiplicación de imágenes es la imagen del producto.

Toda biyección entre dos estructuras que, como la g, cumple las dos propiedades establecidas, se denomina **isomorfismo.**

$$\begin{array}{c}[R,+,\times]\xrightarrow{g}[C_1,+,\times]\\ a\longrightarrow g(a)=(a,0)\end{array}$$

es **isomorfismo.**

Ejemplo 10

¿Qué quiere decir que el real 3 es «isomorfo» con el complejo (3, 0)?

Que ambos números se comportan de igual manera cuando se opera con ellos.

Ejemplo 11

Calcúlese la operación que se propone entre elementos complejos de C_1, poniendo de manifiesto el isomorfismo con R.

$$\begin{array}{ccccccccc}[(3,0)\times(2,0)]&+&(1,0)&=&(6,0)&+&(1,0)&=&(7,0)\\ \downarrow g^{-1}&&\downarrow g^{-1}&&\downarrow g^{-1}&&&&\uparrow g\\ 3&\times&2&+&1&=&6&+&1&=&7\end{array}$$

Ejercicio 25

Calcúlese, como se ha hecho en el ejemplo 11, *usando el isomorfismo* $[R, +, \times] \xrightarrow{g} [C_1, +, \times]$, *la siguiente expresión:*

$$A = \left[\left(\frac{1}{2}, 0 \right) + \left(\frac{3}{2}, 0 \right) \right] + (-1, 0).$$

El isomorfismo planteado permite, además, definir el producto de un número real m por el número complejo (a, b) de la siguiente forma:

$$m \cdot (a, b) = (m, 0) \cdot (a, b) = (m \cdot a, m \cdot b).$$

Ejercicio 26

Calcúlense:

a) $\sqrt{2} \times (\sqrt{8}, \sqrt{2})$.

b) $3/2 \times (2,0) + (1, 0) \times 2/5$.

Finalmente, aclaremos esta pregunta: ¿por qué se ha puesto el título a este epígrafe de «isomorfismo de inmersión»?

Si el conjunto de imágenes C_1 se comporta operativamente, lo mismo que lo hace R, se puede decir que este isomorfismo «ha sumergido» R en C y, de algún modo, es posible escribir que R es un subconjunto del conjunto de los complejos C.

$$\boxed{R \subset C} \qquad [1]$$

La expresión [1], en rigor, no es correcta. Sí lo sería $C_1 \subset C$; pero como —se insiste— C_1 es isomorfo con R, desde un punto de vista operativo, se puede decir que el conjunto de los números reales es un subconjunto del conjunto de los números complejos.

2. FORMA BINOMICA DE UN NUMERO COMPLEJO

Un complejo cualquiera (a, b) se puede escribir como suma de los dos complejos particulares $(a, 0)$ y $(0, b)$, y esto de forma única:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b).$$

Si se tiene presente lo dicho acerca del producto de un número real por un complejo, resulta que

$$(a, 0) = a \cdot (1, 0) \quad \text{y} \quad (0, b) = b \cdot (0, 1)$$

con lo que se puede escribir:

$$(a, b) = a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1).$$

Ahora bien, el complejo $(1, 0)$ se puede identificar con el número real 1. Si al complejo $(0, 1)$ se le denomina i, la expresión anterior puede escribirse

$$\boxed{(a, b)=a+bi} \qquad [2]$$

Esta expresión se conoce con el nombre de «forma binómica del complejo (a, b)».

Ejercicio 27

Establézcanse en forma de pares los complejos, escritos en forma binómica:

$$3+2i; \quad 0-i; \quad \sqrt{2}-\sqrt{3}i.$$

Ejercicio 28

Súmense los tres pares que resultan en el ejercicio 27, y el par que resulte póngase en forma binómica.

Ejercicio 29

Escríbanse los tres binomios del ejercicio 27 y súmense algebraicamente, como si fueran polinomios escritos con la letra i en lugar de con la letra x. Compárese el resultado con el obtenido en el ejercicio 28.

3. RESOLUCION DE LA ECUACION $x^2+1=0$

$$x^2+1=0$$
$$x^2=-1$$

En el cuerpo de los números reales, la ecuación $x^2+1=0$ no tiene solución. Efectivamente, no hay ningún $x \in R$ tal que, elevado al cuadrado, resulte -1.

¿Y en el cuerpo de los números complejos? ¿Habrá algún complejo (a, b) que, elevado al cuadrado, dé como resultado el complejo $(-1, 0)$?

Investiguémoslo:

Si existe ese complejo (a, b), ha de cumplirse

$$(a, b)^2=(-1, 0).$$

Desarrollemos la operación $(a, b)^2$:

$$(a, b)^2=(a, b)\cdot(a, b)=(a^2-b^2, 2ab).$$

Si el complejo $(a^2-b^2, 2ab)$ ha de ser igual al complejo $(-1, 0)$, ha de

suceder que

$$\begin{array}{ll} \text{I} & a^2-b^2=-1 \\ \text{II} & 2ab=0 \end{array}$$

$$\text{II}\quad 2ab=0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a=0 \\ \text{ó} \\ b=0. \text{ Esto no es posible porque entonces, } (a,b)\in R, \text{ contra lo establecido.} \end{array} \right. \Longrightarrow \boxed{a=0}$$

Sustituyendo en I,

$$-b^2=-1 \iff b^2=+1 \Longrightarrow b=\pm 1 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{b=+1} \\ \boxed{b=-1} \end{array} \right.$$

luego existen dos complejos

$$(0,1) \quad \text{y} \quad (0,-1),$$

cuyos cuadrados valen -1, y, por tanto, son soluciones de la ecuación $x^2+1=0$, planteada en el cuerpo de los números complejos, C.

> La ecuación $x^2+1=0$ tiene las dos raíces complejas
>
> $(0,1) \quad \text{y} \quad (0,-1)$

Si, como es más cómodo, se utiliza la notación binómica, se escribe:

> La ecuación $x^2+1=0$ tiene las dos raíces complejas
>
> $i \quad \text{y} \quad -i$

Ejercicio 30

¿Cuánto valen las expresiones i^2 y $(-i)^2$?

Ejemplo 12

En la página 282 se estableció que el polinomio x^2+1 no era reducible en R. ¿Lo es en el cuerpo de los complejos C, o lo que es igual (¡atención!), en el anillo $C[x]$?

Ciertamente, sí, ya que como se ha visto,

$$x^2+1=(x-i)(x+i).$$

También es posible ahora dar una interpretación de los números complejos de la forma $(0,b)$ o, en forma binómica, bi. Si se eleva al cuadrado un número

complejo de este tipo, resulta

$$(bi)^2=(0, b)^2=(0, b)\cdot(0, b)=(-b^2, 0)$$

y este número se puede identificar con el número real negativo $-b^2$. Los números complejos de la forma $(0, b)$, que se suelen llamar «imaginarios puros», resultan ser raíces cuadradas de números reales negativos. En particular, el complejo i, así como también el $-i$, son raíces cuadradas de -1.

Para ayudar a fijar lo antedicho, la figura 4.4 lo resume de forma gráfica:

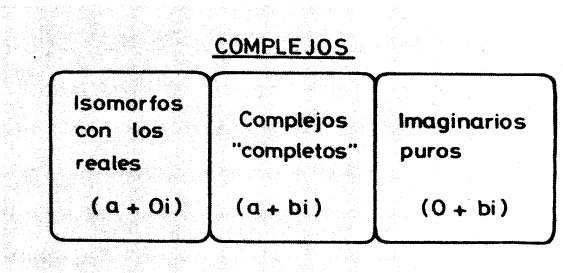


FIG. 4.4.

Tampoco es de extrañar que, por las razones que se llevan expuestas, a la primera proyección del par complejo se la denomine con frecuencia «componente real»; mientras que la segunda suele llamarse «componente imaginaria».

Ejemplo 13

La componente imaginaria del complejo $(3+2i)$ es 2; la componente real de un «imaginario puro» siempre es 0; la componente imaginaria del complejo $(4+i)$ es 1 y la del $(2-i)$ es -1.

Ejemplo 14

Determínese la raíz cuadrada de $-1/4$.

Por supuesto que el dato se refiere al complejo $(-1/4+0i)$; y sus raíces cuadradas son $\frac{1}{2}i$ y $-\frac{1}{2}i$, ya que

$$\left(\frac{1}{2}i\right)^2=\frac{1}{4}i^2=\frac{1}{4}(-1)=-\frac{1}{4}$$

$$\left(-\frac{1}{2}i\right)^2=\frac{1}{4}i^2=\frac{1}{4}(-1)=-\frac{1}{4}$$

Ejercicio 31

Calcúlense las raíces cuadradas de -36.

Ejercicio 32

Elévese al cuadrado $-6i$.

4. OPERACIONES CON COMPLEJOS EN FORMA BINOMICA

Aunque el manejo de los complejos como pares de números reales ya debe hacerse con soltura, la expresión en forma binómica de los mismos permite un mayor automatismo por el simple hecho de utilizar una estructura tan conocida y manejada como es el anillo de polinomios con coeficientes en R.

Si se toman dos complejos $a+bi$ y $c+di$, su suma será

$$(a+bi)+(c+di)=(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)=[(a+c)+(b+d)i].$$

Es decir, dos complejos en forma binómica se suman como si fueran polinomios en i, reduciendo al final términos semejantes.

Ejemplo 15

Obsérvese la facilidad para la suma, pues basta ir sumando partes reales e imaginarias, unas por un lado y otras por otro

$$(1+2i)-(5+i)+(-3-5i)=(1-5-3)+(2-1-5)i=-7-4i.$$

En cuanto al producto, dados los complejos $(a+bi)$ y $(c+di)$, multipliquémoslos como si fueran polinomios en i.

$$\begin{array}{r} a+bi \\ c+di \\ \hline ac+cbi \\ +adi+bdi^2 \\ \hline ac-bd+(ad+bc)i \end{array}$$

y como $i^2=-1$, resulta

Ejercicio 33

Súmese el elemento neutro de la multiplicación de complejos con el doble del opuesto de $(2+i)$.

Para la potenciación de complejos en forma binómica basta utilizar el desarrollo del binomio de Newton y, después, sustituir las diversas potencias de i por sus valores correspondientes:

$$(a+bi)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}bi+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2i^2+\ldots+\binom{n}{n}b^ni^n.$$

¿Y cuánto vale i^n?

Los valores de las potencias de i se repiten de cuatro en cuatro. Así:

$$i^0 = 1 \text{ (por convenio)}$$
$$i^1 = i$$
$$i^2 = -1$$
$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$
$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$$
$$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$$
$$i^7 = i^6 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1.$$

Es suficiente dividir por 4 el exponente. El resto de esa división es el exponente, menor que 4, de la potencia de i a la que equivale i^n.

Ejemplo 16

Determínese el valor de i^{38}.

$$\begin{array}{r|l} 38 & 4 \\ \hline 2 & 9 \end{array} \qquad i^{38} = i^2 = -1.$$

Ejercicio 34

Calcúlense las potencias i^{17}, i^{124}, $i^{1\,003}$.

Ejercicio 35

Calcúlese $(1+i)^5$.

Ejercicio 36

Determínese el valor de $\left(2 - \frac{1}{2}i\right)^6$.

Ejercicio 37

Efectúense los siguientes productos en forma binómica:

$$(3-5i)(4+i); \qquad (a+bi)(a-bi).$$

Ejercicio 38

Resuélvase la ecuación en C

$$X + (2+i) = 3(1+i) - (2+i).$$

5. COMPLEJOS CONJUGADOS

Ya en la página 293 se desarrolló la división de complejos en forma de pares. Allí, para dividir dos complejos, se multiplicaba el dividendo por el inverso del divisor

$$\frac{(a, b)}{(c, d)} = (a, b) \times \left(\frac{c}{c^2+d^2}, \frac{-d}{c^2+d^2} \right) = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{a^2+d^2} \right),$$

cuya expresión binómica sería:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i \right) \qquad [3]$$

Para no tener que recordar la expresión [3], conviene seguir el método operativo que utiliza el complejo conjugado del divisor.

> DEFINICIÓN: Se denomina conjugado de un complejo a otro de igual componente real y de componente imaginaria opuesta.
>
> $$\text{conj } (a+bi) = (a-bi).$$

Ejemplo 17

El conjugado del complejo $(2-i)$ es el complejo $(2+i)$.

Establecido ya el concepto de complejos conjugados, vamos a ver qué pasa si en una división de complejos se multiplican dividendo y divisor por el conjugado de éste último.

Ejemplo 18

$$\frac{3+2i}{1-2i} = \frac{(3+2i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-1+8i}{1-4i^2} = \frac{-1+8i}{1+4} = \frac{1}{5}(-1+8i) =$$
$$= \left(-\frac{1}{5} + \frac{8}{5} i \right)$$

De un modo muy sencillo se ha conseguido establecer el complejo cociente.

Realizando el ejemplo, intentemos hacer de este modo una división del todo general

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2} =$$
$$= \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i \right) \qquad [4]$$

Si se comparan las expresiones [3] y [4], se observa que son idénticas. Ello permite escribir la siguiente

> REGLA: Para dividir dos complejos en forma binómica basta multiplicar dividendo y divisor por el conjugado de este último.

Ejercicio 39

Calcúlese $\dfrac{1-i}{2+i}$.

Ejercicio 40

Resuélvase la ecuación en C,

$$(a+bi)(1+2i)=1,$$

y dígase qué es el complejo $(a+bi)$ *respecto del* $(1+2i)$.

Ejercicio 41

Usando el conjugado, determínese el inverso del complejo

$$\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i\right).$$

Ejercicio 42

Determínese un número complejo, sabiendo que si después de multiplicarlo por $(2-i)$ *se suma al resultado* $(-4+4i)$, *dividiendo lo que se obtiene por* $(2+3i)$, *se vuelve al complejo del que se partió.*

6. AUTOMORFISMO DE CONJUGACION EN *C*

En este mismo capítulo se ha visto lo que es un isomorfismo: una biyección entre dos conjuntos estructurados que «respeta» las operaciones. Pues bien: si ese isomorfismo se establece de un conjunto sobre sí mismo, se dice que es un automorfismo.

> DEFINICIÓN: Automorfismo es un isomorfismo de un conjunto sobre sí mismo.

Es muy interesante el automorfismo φ, que se puede establecer en el conjunto de los complejos C, sobre sí mismo, con el siguiente criterio

Automorfismo $C \xrightarrow{\varphi} C$

A cada complejo se le hace corresponder su conjugado. Es decir:

$$\varphi(a+bi)=a-bi$$

Justifiquemos que, efectivamente, es un automorfismo, para lo cual han de demostrarse tres cosas:

a) que $\varphi: C \to C$ es biyección;
I) que $\varphi(a+bi)+\varphi(c+di)=\varphi[(a+c)+(b+d)i]$;
II) que $\varphi(a+bi)\times\varphi(c+di)=\varphi[(ac-bd)+(ad+bc)i]$.

a) La aplicación φ de C en C, ciertamente, es biyectiva, pues todo complejo tiene conjugado único y cualquier complejo es conjugado único de otro.

I) $\varphi(a+bi)+\varphi(c+di)=(a-bi)+(c-di)=[(a+c)-(b+d)i]=$

$$=\varphi[(a+c)+(b+d)i].$$

II) $\varphi(a+bi)\times\varphi(c+di)=(a-bi)\times(c-di)=[(ac-bd)-(ad+bc)i]=$

$$=\varphi[(ac-bd)+(ad+bc)i].$$

La figura 4.5 esquematiza lo que se lleva establecido.

Automorfismo de conjugación *

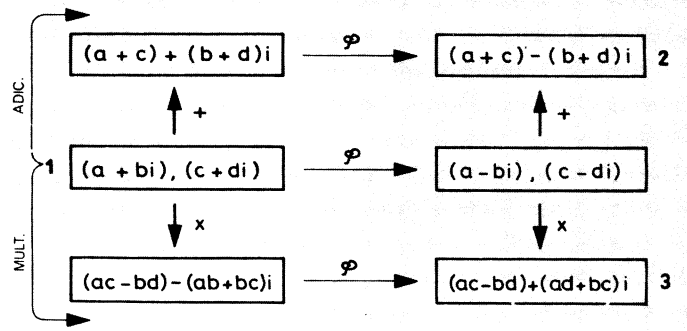


FIG. 4.5.

— Arrancando del par de complejos del recuadro 1 se alcanza el mismo resultado 2 sumando-transformando que transformando-sumando.

— Arrancando del par de complejos del recuadro 1 se alcanza el mismo

* Propiamente, la aplicación que transforma pares de $C\times C$ en pares de conjugados no es la misma que la que transforma un complejo en su conjugado. Sin embargo, a este nivel es más lo que se gana en claridad que lo que supone la incorrección.

resultado 3 multiplicando-transformando que transformando-multiplicando.

Ejemplo 19

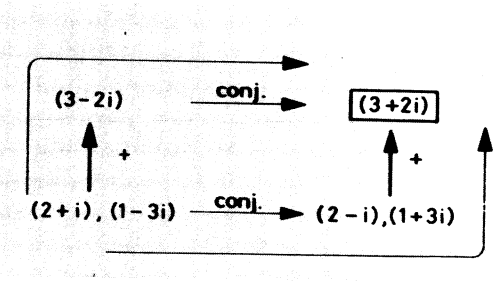


FIG. 4.6.

Ejemplo 20

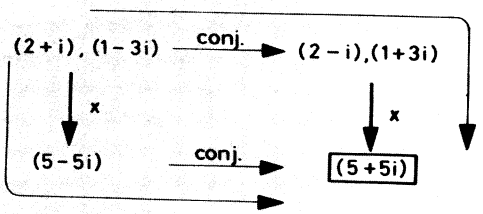


FIG. 4.7.

Ejercicio 43

Muéstrese el automorfismo de conjugación, usando el opuesto y el inverso del complejo $(1-i)$.

7. ECUACIONES CUADRATICAS EN *C*

De sobra es conocido que la ecuación $ax^2+bx+c=0$, establecida en el cuerpo de los números reales, tiene por soluciones

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Puede suceder que el discriminante $b^2-4ac<0$, en cuyo caso nos enfrentamos con la raíz de un número negativo que no tiene solución en R.

Ejemplo 21

Resuélvase la ecuación $x^2+2x+2=0$.

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}$$

La ecuación planteada no tiene solución en el cuerpo R; pero sí la tiene en el cuerpo de los complejos. En efecto:

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{4(-1)}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{4i^2}}{2}=\frac{-2\pm 2i}{2}=\begin{cases}x_1=(-1+i)\\ x_2=(-1+i)\end{cases}$$

Ejercicio 44

Resuélvase la ecuación $x^2-6x+10=0$.

OBSERVACIÓN: Cuando una ecuación de coeficientes reales admite la raíz compleja $(a+bi)$, admite también su conjugada $(a-bi)$.

8. REPRESENTACION GRAFICA DE LOS NUMEROS COMPLEJOS. AFIJOS

Se disponen dos ejes rectangulares como los de la figura 4.8. Sobre el eje de abscisas, denominado *eje real,* se dispone el valor de la primera proyección del complejo a representar; y sobre el eje de ordenadas, llamado *eje imaginario,* se marca el valor de la segunda proyección del complejo.

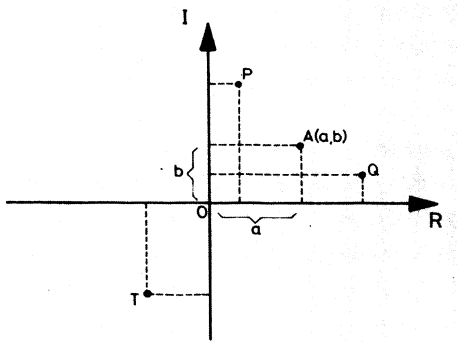


FIG 4.8.

De esta manera, a cada complejo $(a+bi)$ le corresponde un punto del plano de coordenadas (a, b); y recíprocamente.

Al punto-imagen se le denomina «*afijo* del complejo».

Sobre la figura 4.8 se representan los afijos P, Q y T, de los complejos $(1+4i)$, $(5+i)$ y $(-2-3i)$.

Ejercicio 45

Represéntense los afijos del opuesto, inverso y conjugado del complejo $(2+i)$.

Todavía se puede hacer otra representación gráfica de los complejos, sumamente interesante, que da lugar a una teoría muy rica, que se desarrollará en cursos superiores. Se trata de lo siguiente.

Si se une el origen de coordenadas con el afijo del complejo, se obtiene una «flecha», resultando que a cada complejo le corresponde una sola de estas flechas, mientras que cada flecha representa un determinado complejo.

En realidad, se trata de una biyección entre esos dos conjuntos de entes matemáticos: el conjunto C y el conjunto de las flechas, que vamos a denotar V

$$C \overset{f}{\longleftrightarrow} V$$

Ejercicio 46

Dibújense las flechas correspondientes a los dos primeros complejos del ejemplo 22.

Si inventamos una operación que vamos a llamar «adición en V», de la manera que se dibuja en la figura 4.9, es decir, trazando por la punta de v_1

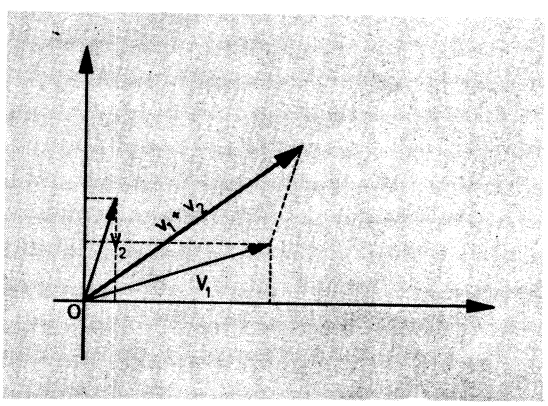


FIG. 4.9.

una paralela de igual tamaño a v_2 y uniendo O con el punto conseguido, resulta que es muy fácil probar que el conjunto de flechas V, con esa adición, tiene estructura de grupo abeliano.

Además, la biyección entre el conjunto de los complejos y el de flechas «respeta» la adición, de modo que nos encontramos ante un isomorfismo:

$$(C, +) \xrightarrow{f} (V, +)$$

Esto es muy importante, porque permite operar con flechas como si fueran complejos y, luego, la flecha-resultado se transforma en el complejo-suma correspondiente.

Ejemplo 23

Súmense gráficamente los complejos $(3+2i)$ y $(-2+7i)$:

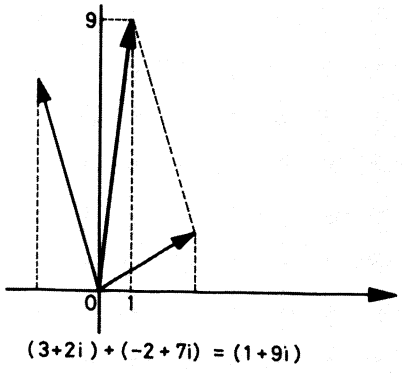


FIG. 4.10.

Ejercicio 47

Réstense gráficamente los complejos $(3+2i)$ *y* $(-2+7i)$, *preparando primero el opuesto del sustraendo y, luego, sumando.*

ADVERTENCIA: Cerramos este capítulo indicando que esto último que se ha estudiado es el principio de una teoría extraordinariamente importante que se desarrollará en próximos cursos.

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 4.2

24. *a)* $f(-2)=(-2,0)$;
b) $f^{-1}(-1,0)=-1$;
c) el complejo $(0,7)$ no es imagen de ningún real.

25. $A=(1,0)$.

26. *a)* $(4,2)$;
b) $(17/5,0)$.

27. $(3,2)$; $(0,-1)$; $(\sqrt{2},-\sqrt{3})$.

28. $(3,2)+(0,-1)+(\sqrt{2},-\sqrt{3})=(3+\sqrt{2},1-\sqrt{3}) \iff$
$\iff [(3+\sqrt{2})+(1-\sqrt{3})i]$.

29. $(3+2i)+(0-i)+(\sqrt{2}-\sqrt{3}i)=[(3+\sqrt{2})+(1-\sqrt{3})i]$.

30. $i^2=-1$; $(-i)^2=-1$.

31. $\sqrt{-36}=\pm 6i$.

32. $(-6i)^2=36i^2=36(-1)=-36$.

33. $(1+0i)+(-4-2i)=(-3-2i)$.

34. $i^{17}=i^1=i$; $i^{124}=i^0=1$; $i^{1003}=i^3=-i$.

35. $1+5i-10-10i+5+i=(-4-4i)$.

36. $(497/64-925/8\,i)$.

37. $(17-17i)$; a^2+b^2.

38. $X=(-1+i)$.

39. $(3/5-1/5\,i)$.

40. $(a+bi)=(1/5-2/5\,i)$; es el inverso, $(a+bi)^{-1}=(1+2i)$.

41. $(1/5-2/5\,i)^{-1}=(1+2i)$.

42. El complejo es $(-1-i)$.

43. op. $(1-i)=(-1+i)$; inv. $(1-i)=(1-i)^{-1}=(1/2+1/2\,i)$.

44. $x_1=(3+i)$; $x_2=(3-i)$.

45. op. $(2+i)=(-2-i)$; $(2+i)^{-1}=(2/5-1/5\,i)$; conj. $(2+i)=(2-i)$.

46. Consúltese la figura 4.8.

47. Han de dibujarse las flechas de $(3+2i)$ y de $(2-7i)$.

4.3

Ejercicios y problemas de recapitulación

1. Exprésense en forma binómica

$$\sqrt{-64}; \quad \sqrt{-100}+\sqrt{16}; \quad \sqrt{-36}.$$

2. Resuélvanse las ecuaciones

$$\begin{aligned} x^2+\ 6x+13&=0;\\ 4x^2+\ 4x+\ 5&=0;\\ x^2-10x+34&=0. \end{aligned}$$

3. Sea el complejo $(2-3i)$. Establézcanse:

a) su inverso;
b) su opuesto;
c) su conjugado;
d) el conjugado de su opuesto;
e) el opuesto de su conjugado.

Muéstrese la relación que existe entre los dos últimos.

4. Determínense la suma, diferencia, producto y cociente de los números complejos.

a) $(2-i)$ y $(3-2i)$;

b) $(2+i)$ y $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)$.

5. Calcúlense los siguientes cocientes:

$$\frac{2i}{1-i}; \quad \frac{1-i}{1+i}; \quad \frac{-2i}{-1-2i}; \quad \frac{1+2i}{2+i}.$$

6. Calcúlense el producto y el cociente de estos pares de complejos:

$$(\sqrt{2}-i) \text{ y } (1-i); \qquad (\sqrt{3}+i) \text{ y } (1-\sqrt{3}i).$$

7. Hállese el valor de la suma

$$1+i+i^2+i^3+\ldots+i^{57}.$$

8. Determínese k en el cociente $\dfrac{k+i}{2+i}$, para que el resultado sea:

a) un número real;
b) imaginario puro;
c) un complejo de componentes iguales.

9. Calcúlese el valor de la expresión $\dfrac{i^{17}-i^{-4}}{2i}$.

10. Hállense dos complejos de manera que sumen $(1+2i)$, y su cociente sea imaginario puro, sabiendo que la proyección real del primero es 2.

11. Justifíquese que todo complejo $(a+bi)$ puede escribirse siempre como cociente de dos complejos conjugados, si se cumple que $a^2+b^2=1$.

12. Calcúlese la potencia $\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

13. Calcúlese la raíz cuadrada del complejo $(-1+i)$.

14. Determínese $(\sqrt{2}-i\sqrt{2})^5$.

15. Represéntense gráficamente los complejos $(2+i)$ y $(3-2i)$. Luego, determínese gráfica y analíticamente su suma.

16. Justifíquese que si $x \cdot v = y \cdot (-u)$, el complejo $\dfrac{x+yi}{u+vi}$ es un número real.

17. Determínese el lugar geométrico de los afijos de todos los complejos de la forma $(a+bi)$, tales que a^2+b^2 es constante.

18. Dibújese el lugar geométrico de los afijos de los complejos de la forma $(a+bi)$, tales que b/a es constante.

19. Establézcase una ecuación de segundo grado de coeficientes reales, una de cuyas raíces es el complejo $(1-2i)$.

20. Determínese gráfica y analíticamente la diferencia $(3-2i)-(1+4i)$.

4.4

Autoevaluación A-4

1. Decir que la ecuación $2x^2+1=0$ no tiene solución
- *a)* es correcto;
- *b)* no es correcto, porque tiene dos;
- *c)* es falso;
- *d)* depende del cuerpo en el que esté establecida.

2. El polinomio x^2-1 es:
- *a)* reducible;
- *b)* no es reducible en $R[x]$;
- *c)* es reducible en $Q[x]$;
- *d)* es reducbile en $Z[x]$.

3. El menor natural, congruente con 7, módulo 5, es
- *a)* $14+2=16$;
- *b)* 2;
- *c)* $\dot{5}+7$;
- *d)* 1.

4. El polinomio más sencillo, de tercer grado, congruente con x^2-3, módulo $x+1$ es:
- *a)* x^3+2x^2-3;
- *b)* $(x^2-3-x-1)x$;
- *c)* $-x-1$;
- *d)* $(x^2-3)^3$.

5. El canónico de la clase de congruencia a la que pertenecen x^3-x y x^3+1 es:
- *a)* $x+1$;
- *b)* $2x^3-x+1$;
- *c)* $-x-1$;
- *d)* $x-1$.

6. Complejo es

a) un polinomio congruente con x^2+1;
b) una clase de congruencia de polinomios, módulo x^2+1;
c) un par de números ordenados;
d) la suma de un real y de un imaginario.

7. El conjunto de los polinomios $R[x]$ tiene estructura de

a) cuerpo;
b) cuerpo abeliano;
c) anillo abeliano con elemento unidad;
d) anillo.

8. El conjunto de las clases de congruencia, módulo x^2+1, alcanza la estructura de

a) cuerpo abeliano;
b) anillo;
c) anillo abeliano con elemento unidad;
d) grupo multiplicativo, excepto la clase cero.

9. La adición dota al conjunto de los complejos de estructura de

a) cuerpo;
b) anillo abeliano;
c) grupo;
d) grupo abeliano.

10. La multiplicación dota al conjunto de los complejos C de estructura de

a) grupo abeliano;
b) semigrupo abeliano con elemento unidad;
c) anillo;
d) anillo conmutativo.

11. La multiplicación dota al conjunto $C^* = C - (0, 0)$ de estructura de

a) grupo abeliano;
b) semigrupo abeliano con elemento unidad;
c) anillo;
d) anillo conmutativo.

12. El conjunto de los complejos con la adición y multiplicación tiene estructura de

a) cuerpo abeliano;
b) cuerpo;
c) anillo sobre R;
d) anillo abeliano con elemento unidad.

13. La afirmación: «Todo número complejo tiene inverso» es:

a) correcta;
b) cierta, por ser cuerpo;
c) incorrecta, porque el $(0, 0)^{-1}$ no existe;
d) depende de la operación de que se trate.

14. El paso de la resolución de la ecuación $3x-2=5 \Longrightarrow 3x=5+2$, consiste en

a) pasar el 2 al otro lado;
b) cambiar el 2 de signo;
c) componer con el opuesto de -2;
d) despejar $3x$.

15. Los números 2 y $(2+0i)$ son:

a) iguales;
b) coincidentes;
c) inversos;
d) isomorfos.

16. Cuando se hace corrientemente esta operación, $2+(3-i)=5-i$, se está cometiendo una incorrección de forma, porque

a) los sumandos no pertenecen al mismo conjunto numérico;
b) $3-i$ no es real;
c) ha de pasarse a pares;
d) es que está mal hecha.

17. Un isomorfismo es

a) una biyección entre conjuntos;
b) una biyección con dos operaciones;
c) una biyección entre dos estructuras, que hace corresponder a las imágenes operadas la imagen del resultado;
d) una biyección conmutativa.

18. Si un isomorfismo se establece de una estructura en sí misma, se denomina:

a) endomorfismo;
b) automorfismo;
c) conjugación;
d) epimorfismo.

19. El valor de i^n depende de:

a) que n sea par o impar;
b) que si n es par, siempre vale 1;
c) que si n es impar, resulta un real negativo;
d) lo que exceda n del múltiplo de 4 más próximo por defecto a n.

20. Las soluciones de la ecuación en C, $x^2+1=0$, son:

a) $(1-i)$ y $(1+i)$;
b) $\pm i$;
c) $(0+0i)$ y $(0-0i)$;
d) -1 y $-i$.

21. El producto de dos complejos conjugados

a) es un número real;
b) es un número real negativo;
c) es un número real positivo;
d) es un número imaginario puro.

22. El punto del plano, representativo de un complejo,

a) se llama flecha;
b) se denomina punto de coordenadas;
c) afijo;
d) sufijo;

23. El afijo del elemento neutro de $(C, +)$ es:

a) no existe;
b) un punto del eje imaginario;
c) el origen de coordenadas;
d) depende del otro operando.

24. Los afijos de dos complejos son simétricos respecto del eje imaginario. Por eso se puede asegurar que:

a) su adición da un imaginario puro;
b) son opuestos;
c) son conjugados;
d) son inversos.

25. Los afijos de dos complejos son simétricos respecto del eje real, lo que indica que:

a) su producto es imaginario puro;
b) son conjugados;
c) son opuestos;
d) su suma es real negativa.

26. Los afijos de dos complejos son simétricos respecto del eje real, lo que nos dice que:

a) su adición es real;
b) son opuestos;
c) su producto es real;
d) su producto es $(1, 0)$.

27. Los afijos de dos complejos son simétricos respecto del origen de coordenadas. Se puede inducir entonces que son:

a) inversos;
b) opuestos;
c) recíprocos;
d) inversos.

28. El afijo de un complejo se encuentra en la bisectriz del primer cuadrante, lo que indica que

a) es el elemento neutro de la multiplicación;
b) que es automórfico;
c) tiene sus dos proyecciones iguales;
d) es isomorfo con un número real.

29. El lugar geométrico de todos los afijos de todos los complejos imaginarios puros es:

a) el eje de abscisas;
b) la bisectriz del segundo cuadrante;
c) el semieje de ordenadas positivo;
d) el eje de ordenadas.

30. El lugar geométrico de los afijos de todos los complejos de la forma $(a-ai)$ es:

a) la bisectriz del segundo cuadrante;
b) la bisectriz del tercer cuadrante;
c) la bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes;
d) la bisectriz del cuarto cuadrante.

31. El lugar geométrico de los afijos de los complejos $(a+bi)$, tales que a^2+b^2 es constante es:

a) una circunferencia de centro el origen de coordenadas y de radio $(a^2+b^2)^{1/2}$;
b) una recta paralela al eje real;
c) una recta paralela al eje imaginario;
d) la primera bisectriz.

32. El lugar geométrico de los afijos de los complejos $(a+bi)$, tales que b/a es constante, es:

a) una circunferencia de radio a^2+b^2;
b) una recta que pasa por el origen;
c) una paralela al eje de ordenadas;
d) una paralela a distancia b/a al eje de abscisas.

33. Determínese el cociente entre el inverso y el conjugado de $(2-i)$.

34. Recontrúyase la ecuación de segundo grado con coeficientes reales, una de cuyas soluciones es $x_1=(1+i)$.

35. Determínese k, para que el cociente $\dfrac{2+ki}{1+i}$ sea imaginario puro.

FICHA-CLAVE DE LA AUTOEVALUACION A-4

1. *d).*	**9.** *d).*	**17.** *c).*	**25.** *b).*
2. *c).*	**10.** *b).*	**18.** *b).*	**26.** *a).*
3. *b).*	**11.** *a).*	**19.** *d).*	**27.** *b).*
4. *a).*	**12.** *a).*	**20.** *b).*	**28.** *c).*
5. *c).*	**13.** *c).*	**21.** *c).*	**29.** *d).*
6. *b).*	**14.** *c).*	**22.** *c).*	**30.** *c).*
7. *c).*	**15.** *d).*	**23.** *c).*	**31.** *a).*
8. *a).*	**16.** *a).*	**24.** *a).*	**32.** *b).*

33. $\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i\right) : (2+i)=\frac{1}{5}$.

34. $x_2=1-i$; $x_1+x_2=2$; $x_1 \cdot x_2=2$; $x^2-2x+2=0$.

35. $k=2$.

UNIDAD TEMATICA 5

PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

5.1. Sucesos aleatorios

1. *Sucesos deterministas y aleatorios*
2. *Experiencia o prueba. Sucesos elementales. Espacio muestral*
3. *Sucesos compuestos. Suceso seguro*
4. *Conjunto-potencia de un espacio muestral*
5. *Sucesos contrarios*
6. *Unión de sucesos*
7. *Intersección de sucesos. Sucesos compatibles*
8. *Leyes del Algebra de sucesos*

5.2. Frecuencia y probabilidad

1. *El ciclo de la Matemática de la aleatoriedad*
2. *Frecuencia de un suceso*
3. *Estabilización de las frecuencias. Ley del azar*
4. *Propiedades de las frecuencias*
5. *Concepto intuitivo de probabilidad. Postulado de indiferencia. Regla de Laplace*
6. *Concepto axiomático de probabilidad*
7. *Consecuencias inmediatas de los axiomas*
8. *Teorema de la probabilidad total*
9. *Teorema de la probabilidad compuesta*

5.3. Estadística

1. *Génesis, definición, ramas y objetivos*
2. *Estadística descriptiva. Terminología. Variable aleatoria. Muestra y población*
3. *Variables cualitativas. Tablas y gráficas*
4. *Variables cuantitativas. Tablas y gráficas*

5. *Reducción de la información: estadísticos*
6. *Estadísticos de centralización*
7. *Estadísticos de dispersión*
8. *Primera idea de la correlación*

5.4. Ejercicios y problemas de recapitulación

5.5. Autoevaluación A-5

5.1

Sucesos aleatorios

1. SUCESOS DETERMINISTAS Y ALEATORIOS

Hasta hace poco tiempo se consideraba que sólo se podían estudiar científicamente aquellos fenómenos que daban los mismos resultados, siempre que se realizaran en las mismas condiciones. Son los llamados «fenómenos deterministas», de los que se puede predecir su evolución.

Ejemplo 1

Una experiencia determinista es poner una bola de plomo sobre la superficie de un lago profundo: siempre se hundirá.

Ejercicio 1

Dígase si es un experimento determinista lanzar un dado y leer su cara superior en reposo.

Hay otra clase de fenómenos de los que hoy también se ocupa la ciencia, y cuyo estudio científico es de extraordinaria importancia. Se trata de las experiencias cuyos resultados no son predecibles. Son los denominados *sucesos aleatorios,* también llamados «estocásticos» o «de azar».

Ejemplo 2

Engendrar hijos varones o hembras es un suceso aleatorio, pues el acoplamiento cromosómico (X, X) o (X, Y) que determina el sexo del hijo no se puede predecir.

Ejercicio 2

La cristalización de NaCl *en el seno de una solución concentrada, ¿es un suceso aleatorio, atendiendo al sistema cristalográfico en que lo hace?*

2. EXPERIENCIA O PRUEBA. SUCESOS ELEMENTALES. ESPACIO MUESTRAL

Para describir el término *suceso* conviene contemplar algunos sinónimos suyos: hecho, sucedido... Se advierte que se trata de sustantivos derivados de una forma verbal claramente pasiva, o sea, pasada.

Todo ello sugiere que un suceso, para que exista, ha de venir precedido de una determinada ejecución (real o fingida). En efecto: un *suceso* se presenta siempre como resultado de una *experiencia* o *prueba.*

Resulta así que, fijada una determinada experiencia, asociado a ella, aparece un conjunto de sucesos posibles, excluyentes entre sí, cada uno de los cuales recibe el nombre de suceso *elemental;* y el conjunto de sucesos elementales se denomina *espacio muestral.*

Ejemplo 3

Sea la experiencia aleatoria «tirar un dado sobre la mesa y leer su cara superior en reposo».

Los sucesos elementales que la experiencia puede producir son seis: que salga y se lea el 1, el 2, el 3, el 4, el 5, el 6, de modo que el espacio muestral es el conjunto

$$H = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}.$$

Ejercicio 3

Establézcase el espacio muestral de la experiencia «lanzar una moneda al aire y ver qué lado presenta, en reposo».

3. SUCESOS COMPUESTOS. SUCESO SEGURO

Se denomina «suceso compuesto» («suceso», en general) a todo subconjunto del espacio muestral $A \subset H$; y recibe el nombre de *suceso seguro* el suceso representado por todo el espacio muestral.

Con lo que se acaba de escribir, ahora se puede definir el concepto de suceso elemental como cualquier subconjunto unitario del espacio muestral.

Ejemplo 4

Sobre la experiencia del ejemplo 3, analicemos en qué consiste el suceso $A =$ «que salga y se lea un número múltiplo de 2».

Es claro que este suceso compuesto se verifica si sale y se lee dos, cuatro o seis puntos, de modo que

$$A = \{h_2, h_4, h_6\}.$$

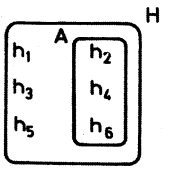


FIG. 5.1.

¿Y, cuál es el suceso descrito de este modo: «que salga y se lea un número menor que 7»?

Evidentemente, se trata del suceso seguro, representado por el espacio muestral.

Ejercicio 4

En una caja hay tres bolas blancas, una azul, otra negra y otra verde. Establézcase el espacio muestral de la experiencia «extraer una bola y observar su color».

Escríbase también el subconjunto que define el suceso A = «extraer bola coloreada».

4. CONJUNTO-POTENCIA DE UN ESPACIO MUESTRAL *H*

Se establece el espacio muestral formado por tres sucesos elementales

$$H = \{h_1, h_2, h_3\}.$$

El conjunto de sus partes o conjunto-potencia de H está formado por todos los subconjuntos de él.

$$P(H) = \left\{ \phi, \{h_1\}, \{h_2\}, \{h_3\}, \{h_1, h_2\}, \{h_1, h_3\}, \{h_2, h_3\}, H \right\}$$

Sus $2^3 = 8$ elementos-conjunto son todos los sucesos a considerar (simples o compuestos) a partir de la experiencia generadora.

¿Qué representa el ϕ? ¿Qué suceso es? Es el *suceso imposible.*

Ejemplo 5

Sea la categoría de pruebas del ejemplo 3. Un modo de escribir el suceso imposible sería

$$\phi = \text{«que salga y se lea 9»}.$$

Otro modo de escribir el mismo suceso podría ser

$$\phi = \text{«que salga y se lea un múltiplo de 11»}.$$

Ejercicio 5

En la misma categoría del pruebas del ejemplo 5:

a) *¿Cuál es el suceso* $\{h_1, h_3\}$*?*
b) *¿Qué subconjunto describe el suceso «sacar múltiplo de* 3*»?*
c) *¿Y, cuál el «obtener un número menor que* 4*»?*

5. SUCESOS CONTRARIOS

Considérese la categoría de pruebas que da lugar al espacio muestral

$$H = \{h_1, h_2, h_3, \ldots, h_n\}.$$

Sea un suceso $A \subset H$. Se denomina «suceso contrario del A», y lo denotamos $\bar{A}$, al suceso que se verifica si, y solamente si, no se presenta A.

Ejemplo 6

Otra vez, sobre la categoría de pruebas del ejemplo 3, consideremos el suceso

$$A = \text{«que salga y se lea un múltiplo de 3»}.$$

Así es que

$$A = \{h_3, h_6\}.$$

El suceso contrario del A es

$$\bar{A} = \{h_1, h_2, h_4, h_5\}.$$

Es claro que si se ha verificado A (han salido tres o seis puntos) no lo ha hecho $\bar{A}$ (que salgan uno, dos, cuatro o cinco puntos); y viceversa.

Ejercicio 6

Determínese el subconjunto que representa el suceso $A =$ *«obtener como máximo cinco puntos al tirar un dado». Establézcase también el subconjunto*

del espacio muestral que representa el suceso B = «conseguir múltiplo de 6», en la misma categoría de pruebas. Decidir si los sucesos A y B son o no contrarios.

¿Cuál es el contrario del suceso seguro? El contrario del suceso seguro es el suceso imposible, de acuerdo con la definición

$$\bar{H} = \phi.$$

6. UNION DE SUCESOS

Sean dos sucesos $A \subset H$ y $B \subset H$, de la misma categoría de pruebas. Se dice que el suceso C es su suceso-reunión, y se escribe:

$$A \cup B = C$$

si, y sólo si, se verifica C cuando lo hace al menos uno de los reunidos.

Los sucesos elementales que forman el suceso-reunión son los que pertenecen a uno, al otro o a los dos reunidos.

Ejemplo 7

En la misma categoría de pruebas de los ejemplos anteriores, se establecen dos sucesos

A = «conseguir un número múltiplo de 2»
B = «obtener un número mayor que 2 y menor que 5»

$A = \{ h_2, h_4, h_6 \}$

$B = \{ h_3, h_4 \}$

$C = A \cup B = \{ h_2, h_3, h_4, h_6 \}$

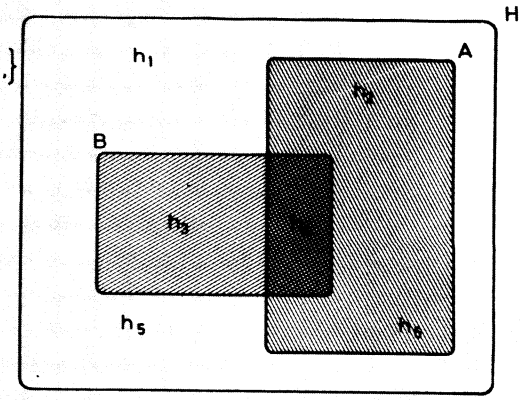


FIG. 5.2.

Usamos un diagrama de Venn (Fig. 5.2), que permite «ver» la reunión $A \cup B$.

$$A = \{h_2, h_4, h_6\}$$
$$B = \{h_3, h_4\}$$
$$C = A \cup B = \{h_2, h_3, h_4, h_6\}$$

Ejercicio 7

Sobre una baraja de cincuenta y dos cartas se realiza la experiencia «extraer un naipe al azar y ver cuál es».

Sea el suceso A = *«obtener un as»*
y el B = *«obtener corazones».*

¿De cuántos sucesos elementales consta el suceso-reunión $A \cup B$*?*

7. INTERSECCION DE SUCESOS. SUCESOS INCOMPATIBLES

Sean los sucesos $A \subset H$ y $B \subset H$, dos sucesos de la misma categoría de pruebas. Se establece que el suceso D es su suceso-intersección, y se escribe

$$A \cap B = D$$

si, y solamente si, se verifica D cuando lo hacen simultáneamente ambos sucesos intersecados.

Los sucesos elementales que forman el suceso-intersección D son los comunes a A y a B.

$A = \{h_2, h_4, h_6\}$
$B = \{h_3, h_4\}$
$D = A \cap B = \{h_4\}$

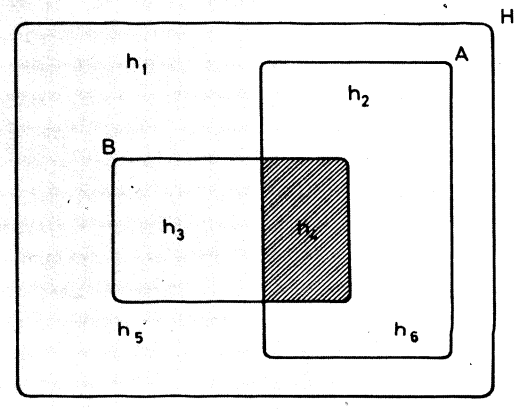


FIG. 5.3.

Ejemplo 8

En la categoría de pruebas del dado, que venimos utilizando, sea

$A =$ «obtener un número par»
$B =$ «obtener un número mayor que 2 y menor que 5»

$$A = \{h_2, h_4, h_6\}$$
$$B = \{h_3, h_4\}$$
$$D = A \cap B = \{h_4\}$$

(Véase Fig. 5.3.)

Ejercicio 8

Continuando en la categoría de pruebas del ejercicio 7, sea el suceso

$A =$ «*obtener figura*»
y el $B =$ «*obtener corazones*».

a) *¿Cuál es el suceso* $A \cap B$*?*
b) *¿De cuántos sucesos elementales consta el suceso-intersección* $A \cap B$*?*

Sucesos incompatibles

Dos sucesos A y B de la misma categoría de pruebas son incompatibles si, y solamente si, su intersección es el suceso imposible. Es decir,

$$\left.\begin{array}{l} A \subset H \quad \text{y} \quad B \subset H \\ \text{son incompatibles} \end{array}\right\} \iff A \cap B = \phi$$

Consecuentemente, los sucesos elementales que constituyen dos sucesos incompatibles son distintos. Por ello, si se verifica A no puede verificarse B; pero, ¡atención!, el hecho de que no se haya presentado A no significa que lo haya hecho B. Puede que no se presente ninguno de los dos.

Ejemplo 9

En una bolsa hay tres bolas pintadas de blanco, rojo y azul, respectivamente. Se extrae una bola al azar. El suceso $B =$ «obtener bola blanca» es incompatible con el $R =$ «obtener bola roja».

Si se ha verificado B no se ha podido verificar R; pero si no se ha conseguido bola blanca, ello no significa que se haya obtenido bola roja; puede haber sido azul.

Ejercicio 9

Sobre una mesa se encuentran las veintiocho fichas del dominó, tapadas. Sea el suceso

$A =$ «*obtener una blanca*»

y el $B =$ «*obtener una ficha cuya suma de puntos sea siete*».

a) *¿Cuál es el subconjunto del muestral del suceso A?*
b) *¿Cuál es el subconjunto del muestral del suceso B?*
c) *¿Son incompatibles esos sucesos? ¿Por qué?*
d) *Si no se ha producido A, ¿ha de verificarse B? Ejemplo.*

No han de confundirse los conceptos de sucesos incompatibles y sucesos contrarios.

El concepto de sucesos contrarios es «más fuerte» que el de incompatibles: dos sucesos contrarios siempre son incompatibles, pero, además, se exige otra condición:

sucesos contrarios A y $\bar{A}$ { sucesos incompatibles: $A \cap \bar{A} = \phi$; recubren el espacio muestral: $A \cup \bar{A} = H$ }

Ejemplo 10

En la experiencia de lanzar un dado, el suceso

$A =$ «obtener múltiplo de 6»

y el $B =$ «conseguir un número de puntos menor o igual que cinco»

están formados así:

$$A = \{h_6\}$$
$$B = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$$

$A \cap B = \phi$ son sucesos incompatibles
$A \cup B = H$ recubren el espacio muestral
$\Longleftrightarrow$ $\boxed{A = \bar{B}}$ son contrarios

Ejercicio 10

¿Cuál es el suceso contrario del $A =$ «*obtener, al tirar un dado, uno, tres o cinco puntos*»*?*

8. LEYES DEL ALGEBRA DE SUCESOS

Lo mismo que, cuando sobre el conjunto de los enteros Z se establece la adición y multiplicación, estas operaciones dotan a Z de estructura de anillo abeliano cancelativo con elemento unidad; de igual manera que los raciona-

les Q con la adición y multiplicación forman un cuerpo, el conjunto de los sucesos aleatorios $\mathfrak{K}$, con las operaciones de reunión e intersección alcanza una estructura que se llama *álgebra de Boole.*

$[Z, +, \times]$ = anillo abeliano con elemento unidad
$[Q, +, \times]$ = cuerpo abeliano
$[\mathfrak{K}, \cup, \cap]$ = álgebra de Boole

No es objeto de este curso sistematizar esta estructura, pero sí conviene presentar algunas leyes de ella para poder utilizarlas en los siguientes capítulos de esta unidad temática.

1.ª *Absorción*

$$A \cup (A \cap B) = A; \qquad A \cap (A \cup B) = A.$$

2.ª *Idempotencia*

$$A \cup A = A; \qquad A \cap A = A.$$

3.ª *Asociatividad*

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C; \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

4.ª *Conmutatividad*

$$A \cup B = B \cup A; \qquad A \cap B = B \cap A.$$

5.ª *Complementariedad*

$$A \cup \bar{A} = H; \qquad A \cap \bar{A} = \phi.$$

6.ª *Distributividad*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Postuladas como axiomas las seis leyes precedentes, dejemos escritos estos tres interesantes teoremas, que utilizaremos después.

7.ª *Identidad*

$$A \cup \phi = A; \qquad A \cap H = A.$$

8.ª *Involución* *

$$\bar{\bar{A}} = A.$$

9.ª *Ley de Morgan* **

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}; \qquad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

* El contrario del contrario de un suceso es el propio suceso.

** El contrario de la reunión es la intersección de contrarios; el contrario de la intersección es la reunión de contrarios.

Ejercicio 11

Sea la experiencia que consiste en volver una ficha de las veintiocho del dominó, que se encuentran «tapadas» sobre la mesa, y leer el número de puntos que resultan.

a) *Establecer el espacio muestral H, con sus trece sucesos elementales.*
b) *¿De cuántos sucesos consta el conjunto-potencia P(H)?*
c) *Denotando por h_i el suceso que consiste en haber conseguido i puntos, simbolícense o descríbanse los siguientes sucesos:*

h_{13}; h_0;

$A = h_5 \cup h_{10}$;
$B =$ «*volver y leer una ficha al menos de diez puntos*»;
$C =$ «*conseguir ficha múltiplo de* 6»;

$D = \overline{h_6 \cup h_{12}}$;
$E = h_4 \cap h_3$.

Ejemplo 11

En la categoría de pruebas del ejercicio 11, ¿qué suceso es $\overline{h_2 \cup \overline{h_4}}$?
Para «aclararlo» podemos utilizar la ley de Morgan:

$$\overline{h_2 \cup \overline{h_4}} = \overline{h_2} \cap \overline{\overline{h_4}}$$

y por la de involución

$$\overline{h_2} \cap \overline{\overline{h_4}} = \overline{h_3} \cap h_4.$$

¿Cuál es el contrario de h_2?

$$\overline{h_2} = \{h_0, h_1, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}, h_{11}, h_{12}\}$$

Entonces:

$$\overline{h_2} \cap h_4 = h_4.$$

El suceso que nos dieron era «destapar una ficha que sume cuatro puntos».

Ejercicio 12

En la categoría de pruebas del ejercicio 11 *se establece el suceso* $\overline{\overline{h_5} \cap \overline{h_{10}}}$. *¿En qué consiste?*

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 5.1

1. No, pueden resultar seis sucesos distintos.

2. No es aleatorio. Siempre cristalizará en el sistema regular.

3. $H = \{\text{cara, cruz}\}$.

4. $H = \{b_1, b_2, b_3, a, n, v\}$;
$A = \{a, n, v\}$.

5. *a)* «sacar uno o tres puntos»;
b) $\{h_3, h_6\}$;
c) $\{h_1, h_2, h_3\}$.

6. $A = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$;
$B = \{h_6\}$;

$B = \bar{A}$.

7. $n(A \cup B) =$ dieciséis sucesos elementales.

8. *a)* $A \cap B =$ «obtener figura de corazones»;
b) $n(A \cap B) = 3$.

9. *a)* $A = \{(0+0), (0+1), (0+2), (0+3), (0+4), (0+5), (0+6)\}$;
b) $B = \{(1+6), (2+5), (3+4)\}$;
c) A y B son incompatibles porque $A \cap B = \phi$;
d) No. Por ejemplo, puede haber salido la $(6+6)$.

10. $\bar{A} =$ «obtener número par».

11. *a)* $H = \{h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}, h_{11}, h_{12}\}$;
b) $n[P(H)] = 2^{13} = 8\,192$ sucesos;
c) $h_{13} =$ «obtener trece puntos» $= \phi$;
$h_0 =$ «conseguir la blanca doble»;
$A =$ «obtener cinco o diez puntos»;
$B = h_{10} \cup h_{11} \cup h_{12}$;
$C = h_6 \cup h_{12}$;
$D =$ «no obtener múltiplo de 6»;
$E =$ «obtener una ficha que sume cuatro puntos y tres puntos» $= \phi$.

12. $\overline{\overline{h_5} \cap \overline{h_{10}}} = h_5 \cup h_{10} =$ «obtener $\dot{5}$».

5.2

Frecuencia y probabilidad

1. EL CICLO DE LA MATEMATICA DE LA ALEATORIEDAD

Establecido en el capítulo anterior el conjunto de los sucesos aleatorios, con su estructura correspondiente de álgebra de Boole, el presente capítulo se dedica a estudiar la cuantificación de su verificación, dentro del espacio muestral, generado por una determinada categoría de pruebas.

El método a seguir es el que siempre se utiliza en Matemáticas y que, formando un ciclo, consta de las siguientes fases:

1.ª Experimentación y observación de la realidad.
2.ª Primera abstracción, creando los objetos matemáticos.
3.ª Segunda abstracción, estructurando los objetos matemáticos.
4.ª Aplicabilidad y contraste de la Teoría Matemática sobre la realidad.

Al intentar contabilizar la verificación de un determinado suceso $A \subset H$, se han de realizar pruebas y constatar resultados: es la primera fase, referible al concepto empírico * de *frecuencia.*

En posesión de este empirismo, y de sus números, se intenta crear un modelo matemático que, al margen de cualquier experimentación, permite calcular *a priori* **, lo más aproximadamente posible, resultados aleatorios: se trata de la segunda fase, la creación del objeto matemático *probabilidad.*

La tercera fase, segunda abstracción, consiste en estructurar axiomáticamente el conjunto de las probabilidades; postulada la base axiomática, se desarrollan los teoremas.

Finalmente, cerrando el ciclo, la aplicabilidad del modelo probabilístico sobre situaciones reales muestra la utilidad del proceso matemático para resolver la cuestión: el cálculo de probabilidades sobre sucesos aleatorios.

---

* Dado por la experimentación.
** De antemano.

Ahí, la **teoría de la predicción**, el concepto de **riesgo**, así como las **leyes de los grandes números** «acoplan» el modelo probabilístico a la realidad aleatoria de las frecuencias.

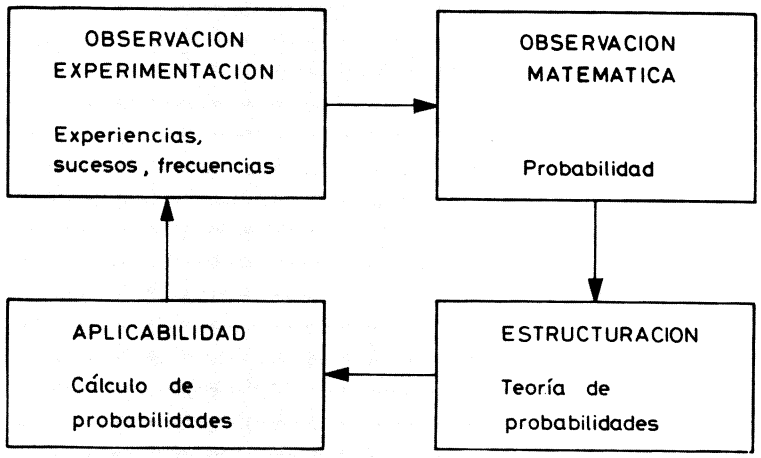


FIG. 5.4.

Antes de iniciar el estudio que hemos planteado conviene intentar destruir el prejuicio que considera todo lo que obedece al azar como irracional. Puede que tal error proceda del concepto vulgar de azar: todo suceso inesperado o que se realiza con sorpresa, fuera de un orden preestablecido; las Matemáticas establecen las inflexibles leyes probabilísticas a las que obedece el azar: el azar matemático.

Una parte moderna de la Matemática de la aleatoriedad es la llamada *teoría de decisiones y juegos de estrategia.* Sus conclusiones respaldan como absolutamente racionales las decisiones que se puedan tomar, basándose en las leyes del azar. Así, ha llegado hasta el gran público la extensa y rigurosa planificación, realizada por determinadas marinas de guerra que, con desplazamientos «al azar» de sus submarinos nucleares, han asestado un duro golpe al espionaje desde el mar de sus enemigos.

2. FRECUENCIA DE UN SUCESO

Se establece una categoría de pruebas y se realizan n experiencias. Si el suceso A se ha presentado n' veces, diremos que la frecuencia absoluta de A ha sido n', y que su frecuencia relativa ha resultado ser n'/n.

Lo denotamos así:

$$f(A) = n' \text{ veces} \qquad [1]$$

$$h(A) = \frac{n'}{n} \qquad [2]$$

Frecuencia absoluta de un suceso es el número de veces que se presenta al realizar una serie de experiencias de una categoría de pruebas.

Frecuencia relativa de un suceso es el cociente entre su frecuencia absoluta y el número de pruebas realizadas.

Ejemplo 12

Se ha medido la talla de ciento veinte alumnos de primer curso de Bachillerato y se han obtenido cincuenta y seis que miden 1,58 metros.

El número de pruebas es $n=120$ medidas.

La frecuencia absoluta del suceso $A=$«medir 1,58 metros» es $n'=56$, y la frecuencia relativa de esa medida es

$$h(1{,}58)=\frac{56}{120}=0{,}466.$$

Ejercicio 13

La frecuencia relativa de un suceso A ha resultado ser 0,4 *al realizar una serie de ciento ochenta pruebas.*

¿Cuál ha sido su frecuencia absoluta? O lo que es igual: ¿cuántas veces se ha presentado ese suceso?

La frecuencia relativa de un suceso puede darse en tanto por uno, como se ha hecho en el ejemplo 12, o en tanto por ciento. Así, la frecuencia relativa del suceso del ejemplo 12 puede decirse que es

$$0{,}466 \times 100 = 46{,}6 \text{ por } 100.$$

Si resultan números muy pequeños, puede darse una tasa por mil (‰), y si resulta cómodo, en partes por millón (ppm).

Ejemplo 13

De ochocientas pruebas de polinización artificial se ha conseguido un maíz híbrido del tipo X en dieciséis ocasiones. ¿Cuál es la frecuencia relativa del suceso X?

$$h(X)=\frac{16}{800}=0{,}02$$

y también:

$$h(X)=0{,}02 \times 100=2 \text{ por } 100$$

o lo que es igual

$$h(X)=0{,}02 \times 1\,000=20 \text{ por } 1\,000.$$

Ejercicio 14

De cinco mil dípteros catalogados se han encontrado solamente cuatro con alas vestigiales. Exprésese la frecuencia relativa del suceso V = «alas vestigiales» en partes por millón.

En lo sucesivo, y como es costumbre, siempre que se escriba «frecuencia», sin especificar otra cosa, nos referiremos a «frecuencia relativa».

3. ESTABILIZACION DE LAS FRECUENCIAS. LEY DEL AZAR

Sea el suceso C = «obtener cara» en la categoría de pruebas «lanzar una moneda al aire y observar su cara superior en reposo».

Se tabulan las frecuencias absolutas $n(C)$ y relativas $h(C)$, en función del número de pruebas realizadas, n.

Número de pruebas n	*Frecuencia absoluta* $n(C)$	*Frecuencia relativa* $h(C)=n(C)/n$
100	51	0,51
200	98	0,49
300	140	0,46
400	205	0,51
500	249	0,495
600	302	0,50
700	340	0,485
800	410	0,51
900	455	0,50
1000	511	0,511

Se realiza ahora la prueba «lanzar un dado homogéneo sobre la mesa y leer su cara superior en reposo». Se han conseguido los siguientes números, referidos al suceso E = «obtener y leer dos puntos».

n	$n(E)$	$h(E)$
100	20	0,2
200	41	0,205
300	50	0,166
400	62	0,155
500	85	0,170
600	104	0,173
700	117	0,167
800	134	0,167
900	151	0,165
1000	165	0,165

Sobre la columna de las frecuencias relativas de los dos ejemplos desarrollados y, mejor aún, sobre las gráficas de la figura 5.5, puede observarse que, a medida que se eleva el número de pruebas, n, las frecuencias, h, «tienden» a estabilizarse alrededor de un valor determinado, que en el caso de las monedas es 0,5, y en el de los dados, 1/6.

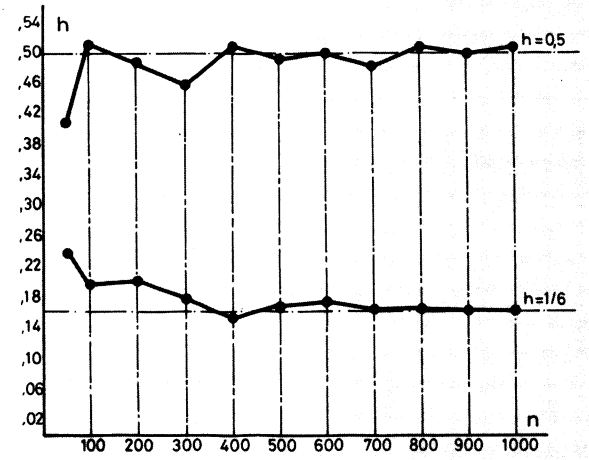


FIG. 5.5.

Esta «tendencia» constituye la *ley del azar,* que dicta:

> En series largas de pruebas, la frecuencia relativa de un suceso «tiende» a estabilizarse alrededor de un número, que coincide con su probabilidad.

Tal formulación resulta de lo más indeseable en Matemática, y ello, entre otras, por estas dos razones:

a) No explicita cuánto se aproxima la frecuencia a la probabilidad, ni cuál ha de ser la longitud de la serie para conseguir una determinada aproximación.

b) De ningún modo una justificación empírica demuestra una proposición.

Sin embargo, puede admitirse sin recelos esta ley del azar, pues J. BERNOULLI, en 1713, al demostrar la «ley débil de los grandes números», solventó las dificultades apuntadas, respaldando, de este modo, el empirismo de la ley del azar.

4. PROPIEDADES DE LAS FRECUENCIAS

I) La frecuencia relativa de un suceso A es un racional comprendido entre 0 y 1.

En efecto: siendo n el número de pruebas realizadas y n' la frecuencia absoluta del suceso A, es claro que

$$0 \leqslant n' \leqslant n;$$

dividiendo por n,

$$0 \leqslant \frac{n'}{n} \leqslant 1;$$

o sea,

$$\boxed{0 \leqslant h(A) \leqslant 1}$$

II) Las frecuencias relativas del suceso seguro y del suceso imposible son, respectivamente, 1 y 0.

Si H es el suceso seguro, realizadas n pruebas, se habrá presentado n veces, luego

$$\boxed{h(H) = \frac{n}{n} = 1}$$

Por definición, el suceso imposible no se ha presentado ninguna vez en las n pruebas, luego

$$\boxed{h(\phi) = \frac{0}{n} = 0}$$

III) La frecuencia relativa del suceso-reunión de dos incompatibles es igual a la suma de las frecuencias relativas de los sucesos reunidos.

Sean los sucesos A y B incompatibles:

$$A \cap B = \phi.$$

Las frecuencias absolutas en n pruebas han sido

$$f(A) = n_1 \text{ veces}$$
$$f(B) = n_2 \text{ veces}$$

Para que se presente el suceso-reunión, $A \cup B$, habrá de presentarse A o B, pero nunca ambos, por ser incompatibles; de modo que

$$f(A \cup B) = n_1 + n_2$$

$$h(A \cup B) = \frac{n_1 + n_2}{n} = \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n}$$

$$\boxed{h(A \cup B) = h(A) + h(B)}$$

5. CONCEPTO INTUITIVO DE PROBABILIDAD. POSTULADO DE INDIFERENCIA. REGLA DE LAPLACE

Antes de nada, quede claro que el concepto que se desarrolla bajo este epígrafe es completamente insuficiente, desde un punto de vista matemático, porque, como se verá en seguida, no se respetan las más elementales reglas de definición, como es que «en la definición no puede entrar el término definido». Habrá que esperar al siguiente epígrafe, en el que se desarrolla el concepto de probabilidad de modo axiomático, desde un punto de vista rigurosamente matemático.

Sensibilizado el concepto de probabilidad como la frecuencia de un suceso, cuando el número de pruebas se repite «ilimitadamente», considérese un espacio muestral H formado por n sucesos *equiprobables e incompatibles;* es decir, un sistema completo de sucesos:

$$H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}.$$

Según lo establecido, sus probabilidades cumplen las siguientes expresiones:

$$p(H) = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} p(h_1) + p(h_2) + \ldots + p(h_n) = 1 \\ p(h_1) = p(h_2) = \ldots = p(h_n) \end{array}\right\} \Longrightarrow p(h_i) = \frac{1}{n}$$

Si un suceso $A \in P(H)$, se obtiene mediante la reunión de los m incompatibles

$$A = h_1 \cup h_2 \cup \ldots \cup h_m,$$

sucede que

$$p(A) = p(h_1) + p(h_2) + \ldots + p(h_m)$$

$$p(A) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots \quad (m \text{ veces}$$

$$\boxed{p(A) = \frac{m}{n}}$$

La expresión recuadrada constituye la regla de Laplace, que dice:

> La probabilidad de un suceso es el cociente entre los casos favorables (éxitos) y casos posibles, considerados *equiprobables e incompatibles.*

Ejemplo 14

¿Qué probabilidad existe de obtener un número múltiplo de 3 al lanzar un dado homogéneo sobre la mesa?

$$H=\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$$

$$p(h_1)=p(h_2)=\ldots=p(h_6)=\frac{1}{6}$$

$$A=h_3 \cup h_6$$

$$p(A)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3};$$

o lo que es igual: casos favorables = dos; casos posibles = seis.

$$p(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

Ejemplo 15

¿Qué probabilidad hay de conseguir cuatro puntos, al levantar una ficha de dominó?

Casos posibles:	28
Casos favorables:	0+4
	1+3
	2+2

$$p(A)=\frac{3}{28}$$

Ejercicio 15

¿Qué probabilidad existe de obtener un rey al sacar una carta de una baraja de cincuenta y dos naipes?

Ejercicio 16

¿Qué posibilidad hay de conseguir un múltiplo natural de 5 al levantar una ficha de dominó?

Ejemplo 16

Determínese la probabilidad de extraer simultáneamente dos bolas coloreadas de una bolsa que contiene tres bolas blancas y otras cuatro de estos colores: azul, verde, negro y rojo.

Cálculo de todos los sucesos posibles de extracción

Se dispone de $3+4=7$ bolas, y se han de tomar de dos en dos. Como el orden no afecta, todas las posibles extracciones son las combinaciones de siete bolas tomadas de dos en dos:

$$\binom{7}{2}$$

Cálculo de los sucesos-éxito

Son cuatro las bolas coloreadas, de modo que las parejas que satisfacen el suceso pedido son las combinaciones de esas cuatro bolas tomadas de dos en dos: $\binom{4}{2}$

$$p(A)=\frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}}=\frac{6}{21}=0{,}142.$$

Ejercicio 17

¿Cuál es la probabilidad de obtener tres reyes al tomar tres cartas de una baraja de cincuenta y dos naipes?

Ejemplo 17

Determínese la probabilidad de conseguir un número par, de todos los de tres cifras que se pueden escribir con los guarismos 1, 2, 3, 4 y 5.

¿Cuántos números de tres cifras se pueden escribir con los cinco dados?

$$V_{5,3}=5\times 4\times 3=60 \text{ números distintos.}$$

¿Cuántos de esos sesenta son pares?

Los que acaben en 2 o en 4.

¿Cuántos acaban en 2?

$\square\ \square\ 2$ $\quad\searrow\ V_{4,2}=4\times 3=12$

¿Cuántos acaban en 4?

$\square\ \square\ 4$ $\quad\searrow\ V_{4,2}=4\times 3=12$

$\Big\}\ 2\times V_{4,2}$ números pares

$$p\,(\text{par})=\frac{\text{éxitos}}{\text{total números}}=\frac{2\times V_{4,2}}{V_{5,3}}=\frac{2\times 12}{60}=0{,}4$$

Ejercicio 18

Con los guarismos 2, 4, 6 *y* 8 *se forman todos los números de tres cifras. ¿Cuál es la probabilidad de tomar al azar uno que sea múltiplo de* 3*?*

6. CONCEPTO AXIOMATICO DE PROBABILIDAD

Inaceptable el concepto intuitivo de probabilidad, por las razones antes expuestas, KOLMOGOROV, en 1933, estableció definitivamente la probabilidad de un modo axiomático.

Sean H el espacio muestral y $P(H)$ —el conjunto de sus partes—, el universal al que pertenecen todos los sucesos del discurso.

Se denomina probabilidad a una aplicación de $P(H)$ en el conjunto de los números reales, $\mathcal{R}$,

$$P(H) \xrightarrow{p} \mathcal{R},$$

que obedece a los siguientes axiomas:

I. $\forall A \in P(H), \quad 0 \leqslant p(A) \leqslant 1.$

II. $p(H) = 1.$

III. $A \in P(H),\ B \in P(H)/A \cap B = \phi \implies p(A \cup B) = p(A) + p(B).$

7. CONSECUENCIAS INMEDIATAS DE LOS AXIOMAS

La probabilidad del suceso contrario de otro es igual a la unidad menos la probabilidad del directo.

En efecto:

$$A \cup \bar{A} = H \wedge A \cap \bar{A} = \phi$$

$$p(H) = p(A) + p(\bar{A})$$

$$1 = p(A) + p(\bar{A})$$

$$\boxed{p(\bar{A}) = 1 - p(A)}$$

Como corolario de este teorema resulta

$$\boxed{P(\phi) = 0}$$

ya que $H = \phi$

$$p(H) = 1 - p(H) = 1 - 1 = 0.$$

8. TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

La probabilidad del suceso-reunión de dos sucesos es igual a la suma de las probabilidades de los reunidos, menos la de su intersección. Simbólicamente:

$$A \subset P(H), \quad B \subset P(H), \quad p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

El álgebra de sucesos justifica de manera elemental lo que expresa el

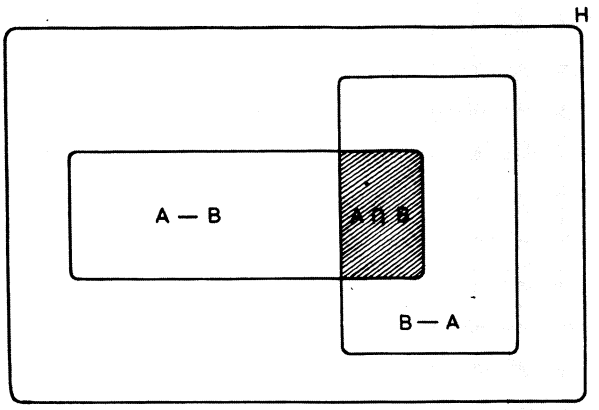


FIG. 5.6.

diagrama de Venn de la figura 5.6, o sea, que

$$(A \cup B) = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$$
$$p(A \cup B) = p(A - B) + p(B - A) + p(A \cap B). \qquad [1]$$

Del mismo modo, los sucesos A y B están constituidos por la reunión de incompatibles,

$$A = (A - B) \cup (A \cap B); \qquad B = (B - A) \cup (A \cap B),$$

lo que permite escribir para sus probabilidades (axioma III),

$$\begin{array}{r} p(A) = p(A - B) + p(A \cap B) \\ p(B) = p(B - A) + p(A \cap B) \\ \hline p(A) + p(B) = p(A - B) + p(B - A) + p(A \cap B) + p(A \cap B). \end{array} \qquad [2]$$

Sustituyendo [1] en [2],

$$p(A) + p(B) = p(A \cup B) + p(A \cap B);$$

despejando

$$\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$$

Claro es que el resultado del teorema se muestra acorde con el axioma III, si se trata de sucesos incompatibles, ya que, entonces, el tercer término del segundo miembro de la fórmula se anula, $p(\phi) = 0$.

Así, pues, la expresión recuadrada es del todo general, y sirve tanto para sucesos compatibles como incompatibles.

Ejemplo 18

¿Qué probabilidad hay de conseguir una carta de una baraja de cincuenta y dos que sea as o picas?

Suceso A = «obtener as».

Suceso P = «obtener picas».

Suceso pedido = $A \cup P$ = «obtener as o picas».

$$p(A \cup P) = p(A) + p(P) - p(A \cap P).$$

Suceso $A \cap P$ = «obtener as y picas».

Cálculo de $p(A)$

Exitos de A = cuatro ases.
Extracciones posibles = cincuenta y dos cartas.

$$p(A) = \frac{4}{52}$$

Cálculo de $p(P)$

Existos de P = trece cartas picas.
Extracciones posibles = cincuenta y dos cartas.

$$p(P) = \frac{13}{52}$$

Cálculo de $p(A \cap P)$

Exitos de $A \cap P$ = un as de picas.
Extracciones posibles = cincuenta y dos cartas.

$$p(A \cap P) = \frac{1}{52}$$

Cálculo de $p(A \cup P)$

$$p(A \cup P) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = 0{,}30.$$

Ejercicio 19

Determínese la probabilidad de que al levantar una ficha de dominó se obtenga un múltiplo de 4 *o un número de puntos mayor que* 8.

Ejercicio 20

A un simposio de Geología asisten cien congresistas, de los cuales ochenta hablan inglés y cuarenta francés. ¿Qué probabilidad existe de que dos congresistas, escogidos al azar, se entiendan sin intérprete?

9. TEOREMA DE LA PROBABILIDAD COMPUESTA

Sean dos sucesos compatibles, no imposibles, independientes A y B de la misma categoría de pruebas, generadora del espacio muestral

$$H = \{h_1, h_2, h_3, \ldots, h_n\}$$

formado por n sucesos elementales.

Supongamos que A está formado por n_1 sucesos elementales de ese espacio muestral y B por n_2 sucesos elementales del mismo espacio muestral.

El suceso-intersección $A \cap B$ estará formado por los $n_1 \times n_2$ sucesos elementales del cartesiano $A \times B$ (Fig. 5.7).

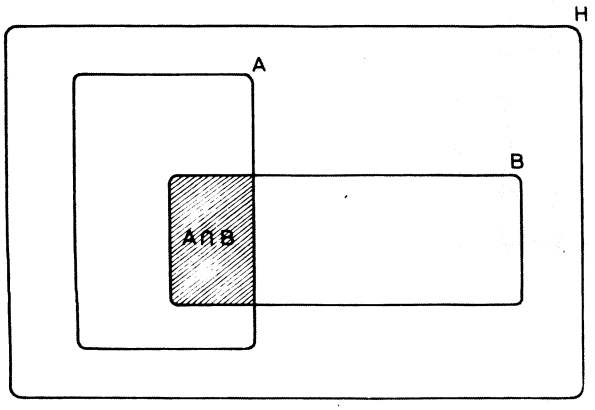


FIG. 5.7.

Como el cartesiano $H \times H$ tiene $n \times n$ pares, la probabilidad de $A \cap B$ es

$$p(A \cap B) = \frac{n_1 \cdot n_2}{n \cdot n} = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{n_2}{n}$$

$$\boxed{p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)} \qquad [3]$$

La [3] constituye el llamado «teorema de la probabilidad compuesta» que dicta:

> La probabilidad del suceso-intersección de dos compatibles, independientes, no imposibles, es igual al producto de las probabilidades de los sucesos intersecados.

Ejemplo 19

Una caja contiene tres bolas blancas y dos negras. ¿Cuál es la probabilidad de extraer sucesivamente dos bolas blancas?

El suceso del cual piden la probabilidad es

$A =$ «obtener bola blanca la primera **y** bola blanca la segunda».

Se trata de la intersección de dos sucesos independientes:

$$A = B_1 \cap B_2$$
$$p(A) = p(B_1) \cdot p(B_2)$$
$$p(A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3-1}{5-1} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = 0{,}3.$$

Ejercicio 21

¿Cuál es la probabilidad de sacar en tres pruebas sucesivas tres reinas de una baraja de cincuenta y dos cartas?

Ejemplo 20

Se dispone de dos cajas iguales, que contienen, respectivamente, dos bolas blancas, tres rojas y cuatro negras, la primera, y tres blancas, cuatro rojas y cinco negras la segunda. Se toma, al azar, una bola de cada una de las cajas. ¿Qué probabilidad hay de que se hayan conseguido del mismo color?

El suceso $S=$«obtener par isocromo *» puede producirse de una de estas tres maneras:

$$\left.\begin{array}{l} B=\text{«obtener par blanco»} \\ \text{o} \\ R=\text{«obtener par rojo»} \\ \text{o} \\ N=\text{«obtener par negro»} \end{array}\right\} S=B\cup R\cup N.$$

Los sucesos B, R y N son incompatibles, de modo que

$$p(S)=p(B)+p(R)+p(N).$$

De otro lado, para que se produzca el suceso B, han de realizarse

$$\left.\begin{array}{l} b_1=\text{«obtener bola blanca de la primera caja»} \\ \text{y} \\ b_2=\text{«obtener bola blanca de la segunda caja»} \end{array}\right\} B=b_1\cap b_2;$$

y de la misma forma los otros dos

$$R=r_1\cap r_2$$
$$N=n_1\cap n_2$$

Los sucesos b_1 y b_2, r_1 y r_2, n_1 y n_2 son sucesos independientes, de manera que, aplicando el teorema de la probabilidad compuesta:

$$\left.\begin{array}{l} p(B)=p(b_1)\cdot p(b_2) \\ p(R)=p(r_1)\cdot p(r_2) \\ p(N)=p(n_1)\cdot p(n_2) \end{array}\right\} +$$

$$p(S)=p(B)+p(R)+p(N)=p(b_1)\cdot p(b_2)+p(r_1)\cdot p(r_2)+p(n_1)\cdot p(n_2)$$

$$p(S)=\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{12}+\frac{3}{9}\cdot\frac{4}{12}+\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{12}=\frac{19}{54}$$

Ejercicio 22

De tres barajas de cincuenta y dos cartas se extraen tres cartas, una de cada una de las barajas. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean del mismo palo?

Ejemplo 21

Se lanza al aire una moneda trucada, diez veces consecutivas, de modo que la probabilidad de obtener cara cada vez es 3/4. ¿Qué probabilidad hay de obtener, al menos una vez, cruz?

* De igual color.

Cuando aparece la locución «al menos» es conveniente, por lo general, calcular la probabilidad del suceso contrario al plantearlo y, al final, restando de 1, obtener la probabilidad del suceso pedido.

A = «obtener al menos una vez cruz»

$\bar{A}$ = «obtener siempre cara»

$A = c_1 \cap c_2 \cap c_3 \cap \ldots \cap c_{10}$

Los sucesos c_1, c_2, c_3, ..., c_{10} son independientes. Entonces

$$p(\bar{A}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \ldots \text{(diez veces)}$$

$$p(\bar{A}) = \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

$$p(A) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10} = 1 - 0{,}06 = 0{,}94.$$

Ejercicio 23

¿Cuál es la probabilidad de obtener un cinco al lanzar un dado? Y, ¿cuál la de obtener al menos un cinco, al tirar ocho veces?

Ejercicio 24

¿Cuál es la probabilidad de torpedear un barco si sólo se pueden lanzar tres torpedos, y la probabilidad de impacto de cada uno de ellos se estima en 0,25?

SUGERENCIA: *El análisis del suceso corresponde a esta frase: «acertar la primera vez;* **o** *fallar la primera* **y** *acertar la segunda;* **o** *fallar la primera* **y** *la segunda* **y** *acertar la tercera».*

Ejercicio 25

El coeficiente de acierto de un rifle se estima en un 99,2 *por* 100. *¿Qué probabilidad tiene de hacer diana con ese rifle un tirador olímpico, que ha mantenido una marca, durante seis años, de* 298 *dianas de* 300 *tiros?*

Ejercicio 26

Se lanzan nueve monedas al aire. ¿Qué probabilidad hay de conseguir cinco caras y cuatro cruces?

SUGERENCIA: *Calcúlense todos los posibles resultados de las nueve tiradas como las variaciones con repetición de los elementos cara y cruz, que se pueden repetir hasta nueve veces.*

Ejercicio 27

En una urna hay cincuenta bolas numeradas con los cincuenta primeros números naturales. ¿Qué probabilidad hay de sacar cincuenta bolas en el orden natural?

Ejercicio 28

¿Cuál es la probabilidad de que, lanzando tres dados, se obtengan nueve puntos?

En una bolsa hay b bolas blancas y n negras.

Un operador extrae k bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que resulten i blancas y $k-i$ negras?

Posibilidades de extracción: Combinaciones de las $b+n$ bolas, tomadas de k en k: $\binom{b+n}{k}$.

Exitos: Existen $\binom{b}{i}$ modos de conseguir las i blancas.

Por cada forma de éstos hay $\binom{n}{k-i}$ maneras de obtener las $k-i$ negras, de modo que el número de éxitos es:

$$\binom{b}{i} \cdot \binom{n}{k-i}$$

$$P = \frac{\binom{b}{i}\binom{n}{k-i}}{\binom{b+n}{k}}$$

Ejercicio 29

En una baraja hay cuatro ases y cuarenta y ocho cartas no ases. Un jugador extrae cinco cartas. ¿Qué probabilidad hay de que haya conseguido un trío de ases?

Ejercicio 30

Se propone a un equipo de tres alumnos la resolución de un problema. Se estima, en función de sus evaluaciones, que la probabilidad de que lo resuelva el primero es 1/2; *la de que lo resuelva el segundo es* 1/3 *y* 1/4 *la probabilidad de que lo consiga resolver el tercero. ¿Cuál es la probabilidad de que resuelva el problema el equipo?*

SUGERENCIA: Ha de utilizarse el teorema de la probabilidad total, que para tres sucesos toma la forma

$$p(S)=p(A)+p(B)+p(C)-p(A\cap B)-p(A\cap C)-p(B\cap C)+p(A\cap B\cap C).$$

Ejemplo 23

Tres jugadores A, B y C lanzan una moneda homogénea al aire, en ese orden, continuando el juego hasta que uno de ellos consiga obtener cruz. ¿Cuál es la probabilidad de ganar que tiene cada uno de los tres jugadores?

Analicemos el suceso $A=$«sacar cruz el primero».

En principio, puede ganar en la primera tirada o en la segunda o en la tercera o en la n-sima, de modo que

$$A=A_1\cup A_2\cup \ldots \cup A_n.$$

Pero para que se pueda verificar A_2 es necesario que en la primera tirada hayan fallado A, B y C, de modo que el suceso A_2 está formado por la intersección cuádruple

$$A_2=a_1\cap b_1\cap c_1\cap a_2$$

Si es en la tercera tirada, A_3, donde gana el primero, análogamente

$$A_3=a_1\cap b_1\cap c_1\cap a_2\cap b_2\cap c_2\cap a_3$$

El proceso se repite hasta la n-sima tirada, lo que supone para el suceso A la siguiente composición:

$$A=a_1\cup(\bar{a}_1\cap\bar{b}_1\cap\bar{c}_1\cap a_2)\cup(\bar{a}_1\cap\bar{b}_1\cap\bar{c}_1\cap\bar{a}_2\cap\bar{b}_2\cap\bar{c}_2\cap\bar{a}_3)\cup\ldots$$

Los reunidos son incompatibles, y los interesados, independientes, de manera que

$$p(A)=p(a_1)+p(a_1)\cdot p(b_1)\cdot p(c_1)\cdot p(a_2)+\ldots$$
$$p(A)=1/2+(1/2)^4+(1/2)^7+\ldots$$

Se trata de la suma de los términos de una progresión geométrica, ilimitada, decreciente, de razón 1/8. El límite de esa suma proporciona la probabilidad buscada:

$$p(A)=\frac{1/2}{1-1/8}=\frac{4}{7}.$$

Del mismo modo se calculan las probabilidades de ganar de los otros dos jugadores, que son

$$p(B)=\frac{2}{7}$$

$$p(C)=\frac{1}{7}$$

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 5.2

13. $f(A) = 0{,}4 \times 80 = 32$ veces.

14. $h(V) = 800$ ppm.

15. $p(k) = \dfrac{4}{52} = 0{,}076.$

16. $p(\dot{5}) = \dfrac{5}{28} = 0{,}178.$

17. $p(3k) = 0{,}00018.$

18. $p(\dot{3}) = \dfrac{2P_3}{V_{4,3}} = 0{,}5.$

19. $p = \dfrac{12}{28}\cdot$

20. $p = 0{,}757.$

21. $p(3Q) = \dfrac{4}{52}\cdot\dfrac{3}{51}\cdot\dfrac{2}{50} = 0{,}00018.$

22. $p = 4\cdot\left(\dfrac{13}{52}\right)^3 = \dfrac{1}{16}\cdot$

23. *a)* $p(5) = \dfrac{1}{6};$

b) $p(\text{al menos un } 5) = 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^8 = 0{,}77.$

24. $p = 0{,}25 + 0{,}75 \times 0{,}25 + 0{,}75 \times 0{,}75 \times 0{,}25 = 0{,}58.$

25. $p' = 0{,}992 \times \dfrac{298}{300} = 0{,}99.$

26. $p = \dfrac{\binom{9}{5}}{VR_2^9} = \dfrac{126}{2^9} = 0{,}25.$

27. $p = \dfrac{1}{50}\cdot\dfrac{1}{49}\cdot\dfrac{1}{48}\cdot\ldots = \dfrac{1}{50!}\cdot$

28. $p = \dfrac{25}{6^3} = \dfrac{25}{216} = 0{,}12.$

29. $p = \dfrac{\binom{4}{3}\cdot\binom{48}{2}}{\binom{52}{5}} = 0{,}09.$

30. $p(S) = 0{,}75.$

5.3

Estadística

1. ESTADISTICA: GENESIS, DEFINICION, RAMAS Y OBJETIVOS

La génesis de la Estadística se pierde en la más remota antigüedad. Se tienen noticias históricas de *censos* chinos del siglo XXIII a. J.C. Tampoco cabe ninguna duda de que los egipcios tabulaban sus riquezas y potencial humano, antes del éxodo hebreo. TÁCITO, con su ajustada prosa de historiador sobrio, relata la orden de CÉSAR AUGUSTO referente a censar sus ejércitos, marina, tesoros y habitantes de su imperio.

Hacia 1650 aparece por primera vez en Centroeuropa la palabra «Estadística», para indicar el conjunto de métodos de recolección de datos y documentación útil en la administración del Estado *(status)*.

Junto a esta línea, procedente de la exigencia del gobernante para conocer su gobierno y realizar su administración, paralelamente a ella se desarrolla otra vía de evolución de esta ciencia; y con una causa bien distinta y hasta trivial *, en su raíz: los juegos de azar. Durante los siglos XVII y XVIII, en las sofisticadas cortes europeas —principalmente en Francia—, el juego se pone de moda, y grandes matemáticos, como PASCAL y FERMAT, en París, o DE MOIVRE —después— exiliado en Londres, al servicio de los aristócratas, dan un tremendo impulso a la Estadística y el Cálculo de probabilidades, al intentar resolver los problemas de juego que sus acaudalados clientes les proponían.

A partir de entonces, la exigencia que la sociedad hace continuamente a la Matemática para poder avanzar en el estudio de la Sociología, Psicología, Biología, Genética, Economía, Política y tantas otras disciplinas, han provocado un enorme crecimiento de la ciencia estadística.

En general se puede enunciar que:

Estadística es la ciencia que proporciona los métodos para el tratamiento

* Sin importancia.

de datos de observación, para decidir la aceptación o rechazo de ciertas afirmaciones o leyes (S. Ríos).

Conviene establecer claramente las ramas de la Estadística, bien distintas en sus pretensiones e instrumentos de cálculo. Y aun cuando en este nivel sólo se aborda parte de la Estadística descriptiva, bueno será contemplar el cuadro general de su desarrollo, lo que dará idea de su extensión y de su enorme importancia y responsabilidad en su rama inferencial y teoría de la decisión.

Estadística descriptiva. Se encarga esta parte de la Estadística de:

— recoger datos,
— coleccionar datos,
— representar datos, y
— tratar la información, reduciendo a estadísticos.

Le basta como instrumento el cálculo elemental.

Estadística inferencial o teoría de muestras. Tiene por objeto:

— desarrollar las técnicas necesarias para calcular o comprobar los *parámetros* de una población, a partir de los datos suministrados por la Estadística descriptiva, de un subconjunto de la población, representativo y aleatorio, llamado «muestra».
— medir la incertidumbre de las conclusiones, en términos de probabilidad.

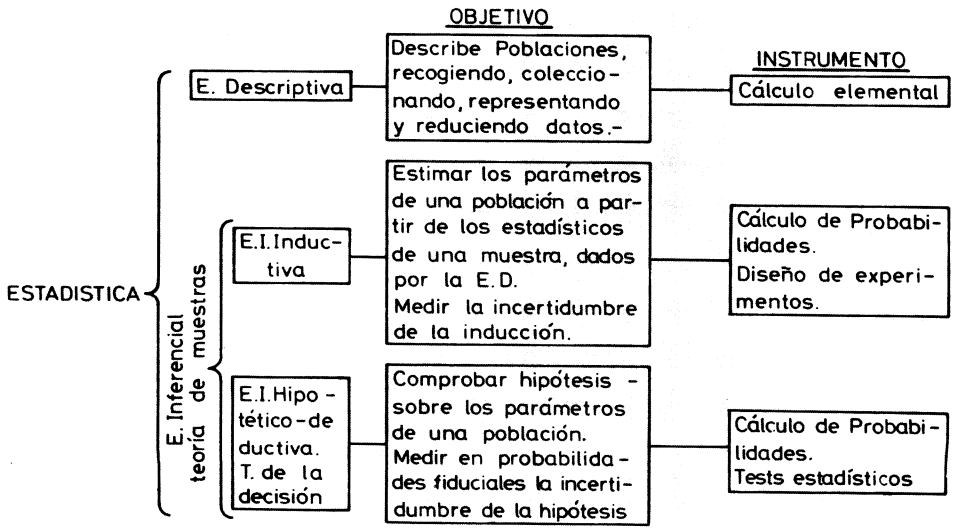


FIG. 5.8.

A su vez, la Estadística inferencial tiene dos partes, tituladas *Estadística inferencial inductiva* y *Estadística inferencial hipotético-deductiva,* encargadas de resolver los específicos problemas de sus ámbitos, que se abordarán en otros cursos.

El problema de la toma de muestras para la inferencia estadística no corresponde propiamente a la Estadística, sino que ha de venir resuelto por una disciplina anexa a ella, que se denomina *Diseño de experimentos.*

El cuadro que se proporciona resume lo que se lleva dicho.

2. ESTADISTICA DESCRIPTIVA. TERMINOLOGIA. VARIABLE ALEATORIA. MUESTRA Y POBLACION

Se denomina *variable aleatoria o estadística* a la variable que toma «valores», llamados *resultados,* dentro de un determinado dominio o *carácter,* con una determinada frecuencia o probabilidad.

Ejemplo 24

La variable x de la función analítica

$$\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} : f(x) = x + 2$$

no es una variable aleatoria porque para cada uno de los valores de su dominio, los reales $\mathfrak{R}$, se obtiene un solo y predecible resultado, que es su imagen.

La variable «talla de los soldados» en el conjunto de los cinco mil hombres de un cuartel es una variable estadística o aleatoria porque un determinado resultado, por ejemplo, 1,72 metros, se ha presentado trescientas veinticinco veces, pues han sido trescientos veinticinco militares los que tienen esa estatura.

De modo que al valor 1,72 viene asociada la frecuencia

$$h = \frac{325}{5\,000} = 0{,}065.$$

Ejercicio 31

Se realiza una larga serie de tiradas de un dado.

¿Cuál es la probabilidad asociada al «resultado 5» de la variable aleatoria «puntos conseguidos»?

La variable aleatoria puede ser *cualitativa* y *cuantitativa.* En el primer caso, los resultados que pueden aparecer en su *carácter* o *atributo* no son números, y se los suele llamar *modalidades* o *rúbricas;* y si son dos las modalidades que cubren el conjunto de resultados, la variable recibe el nombre de *dicotómica* y, por extensión, el carácter se denomina *dicotómico.*

Ejercicio 32

Díganse cuáles de estas variables aleatorias son cuantitativas o cualitativas y descúbrase el carácter dicotómico de éstas últimas que lo tengan:

a) *Talla de cien plantas de soja a las cinco semanas de germinación.*
b) *Peso de los cincuenta nacidos, al cabo de una semana, en una Maternidad.*
c) *Sexo de los empleados en la Administración Civil.*
d) *Resultado de lanzar una moneda al aire cinco mil veces.*
e) *Clasificación de doscientas talofitas del Amazonas.*

A su vez, una variable aleatoria cuantitativa puede ser *discreta* o *continua,* según que pueda tomar determinados valores o todos los innumerables de su dominio. Si la variación cuantitativa discreta o discontinua se lleva a cabo de unidad en unidad, se dice entonces que se trata de un carácter aleatorio *merístico.*

Ejercicio 33

La variable estadística del ejercicio 31, ¿es continua o discreta?

Ejemplo 25

La variable estadística «espesor del dieléctrico» de una fabricación en serie de una determinada pieza de un condensador es una variable aleatoria cuantitativa continua, pues, teóricamente, puede tomar cualquier valor del intervalo de extremos mayor y menor conseguidos.

Ejercicio 34

Dígase si la variable estadística cuantitativa discreta «número de hijos de todas las familias de un cónclave humano» * *tiene carácter merístico.*

El cuadro de la figura 5.9 facilitará la retención de lo que se lleva dicho.

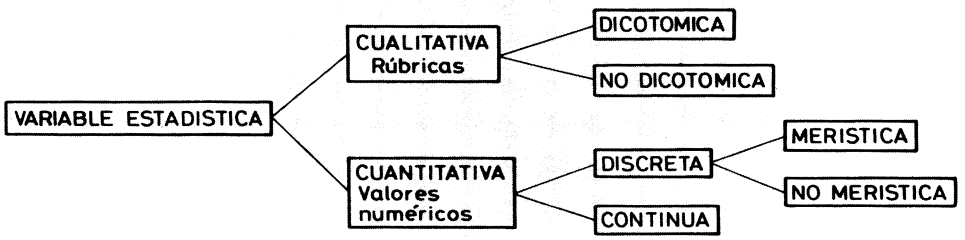


FIG. 5.9.

* De un pueblo, por ejemplo.

Población y muestra

Se denomina *población* al conjunto de individuos que poseen el carácter aleatorio, objeto del estudio estadístico.

Muy frecuentemente, por extensión, recibe el nombre de «población» no el conjunto de individuos (soldados, plantas de soja, etc.), sino el propio conjunto de resultados obtenidos de ellos, referibles al carácter estudiado.

Las poblaciones pueden ser finitas o infinitas.

Se llama *muestra* a todo subconjunto de la población que se aísla para su análisis estadístico.

La mayor parte de las veces, la Estadística descriptiva trabaja con muestras (que han de ser aleatorias y representativas de la población).

Son claras las razones para ello: bien porque se trate de poblaciones realmente infinitas que prohíben absolutamente su estudio completo, bien porque sean poblaciones muy grandes, prácticamente inabordables en su totalidad, o bien porque las experiencias a realizar sean destructivas, el estudio se realiza sobre muestras y no sobre poblaciones.

Ejemplo 26

Sobre el conjunto de todos los ciudadanos de un país se considera la variable estadística «renta per cápita». Siendo muy difícil tomar todos los datos de la población se ha de aislar un subconjunto de ella, una muestra aleatoria y representativa (tarea nada fácil).

Ejercicio 35

El departamento de verificación de una fábrica somete a análisis de rotura unas cuantas piezas de una determinada serie para ver la carga en kilopondios que soportan a la tracción. ¿Por qué no se hace el análisis sobre toda la producción?

3. VARIABLES CUALITATIVAS. TABLAS Y GRAFICOS

Tanto en el tratamiento de las variables estadísticas cualitativas como cuantitativas, como ya quedó dicho, la Estadística descriptiva procede, lo primero, a la recolección de datos.

Son multitud los procedimientos y técnicas para llevarla a cabo, y de muy diversa índole, según el campo del estudio estadístico: desde las encuestas directas hasta el uso de las computadoras, pasando por las series de experimentos realizados por el investigador en ciencias positivas, como la Física, la Química o la Biología.

En cualquier caso, la recolección de datos es un problema delicado, pues un error en esta fase falsea todo el tratamiento posterior; de ahí que, una vez concluida, haya de hacerse un detenido escrutinio de los números con-

seguidos, a fin de revisar datos sospechosos o rechazar los claramente inadmisibles.

Una vez en disposición de los datos, la segunda tarea que aborda la Estadística descriptiva es la de coleccionar o tabular esos datos, y un tercer trabajo consiste en representar esos números «censados» en adecuados gráficos de comprensión inmediata.

Un símbolo que vamos a manejar mucho a continuación es la letra mayúscula griega sigma: Σ.

Es un modo muy cómodo de indicar largas sumas.

Ejemplo 27

¿Qué significa la expresión

$$\sum_{n=1}^{5} 2n^2+1?$$

$$\sum_{n=1}^{5} 2n^2+1=(2\cdot 1^2+1)+(2\cdot 2^2+1)+(2\cdot 3^2+1+(2\cdot 4^2+1)+(2\cdot 5^2+1)=$$

$$=3+9+19+33+51=115.$$

Ejercicio 36

a) *Desarróllense los cinco términos del binomio de Newton* $(x+2)^4$.

b) *Desarróllese* $\sum_{n=0}^{4} \binom{4}{n} x^{4-n}\cdot 2^n$.

c) *Compruébese que se trata de los mismos desarrollos.*

Ejemplo 28

Ocupaciones predominantes de la población activa femenina en España (1960). (Fuente: *Bases para una política educativa.* Ministerio de Educación y Ciencia.)

Ocupaciones (x)	*Cifras absolutas* (n_i)	*Frecuencias* (h_i)
Servicio doméstico	577.571	0,338
Sector agrícola	409.580	0,237
Artesanas y jornaleras	422.096	0,246
Dependientas de comercio	54.583	0,032
Empleadas administrativas	119.573	0,070
Profesiones técnicas	114.387	0,067
	$N=\Sigma n_i=1\,697\,790$	$\Sigma h_i=1$

Sea la población laboral femenina en España, en el año 1960.

El cardinal de la población es $N = 1\,697\,790$ mujeres.

La variable estadística cualitativa *ocupación* toma las seis modalidades o rúbricas que aparecen en el cuadro, y la frecuencia absoluta con que se da cada una de ellas está en la columna n_i. La frecuencia relativa, que se obtiene, como se sabe, dividiendo por N cada una de las absolutas, está tabulada en la columna h_i.

> En toda distribución estadística, la suma de las frecuencias absolutas es igual al cardinal de la muestra.
>
> $$\Sigma n_i = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + = N.$$

Si dividimos por N los miembros de la anterior igualdad se obtiene:

$$\frac{n_1}{N} + \frac{n_2}{N} + \frac{n_3}{N} + \ldots = \frac{N}{N} = 1$$

$$h_1 + h_2 + h_3 + \ldots = 1,$$

lo que significa:

> En toda distribución estadística, la suma de las frecuencias relativas siempre es la unidad.
>
> $$\Sigma h_i = 1.$$

Para representar las distribuciones de frecuencias de estas variables estadísticas cualitativas pueden utilizarse los *diagramas de barras,* los *ciclogramas* o *gráficos de sectores* o los *pictogramas.*

Los primeros, que se pueden disponer vertical u horizontalmente, se construyen dibujando unos rectángulos de bases convencionales (disposición vertical) y cuyas alturas son proporcionales a las frecuencias absolutas y relativas de cada una de las modalidades que toma el atributo.

Los ciclogramas se construyen sobre un círculo o semicírculo, disponiendo sectores cuyas amplitudes angulares son proporcionales a las frecuencias de cada una de las rúbricas o modalidades del atributo.

Los pictogramas son una variante de los diagramas de barras. En ellos, en lugar de la abstracción geométrica de los rectángulos, se dibujan filas, o columnas de individuos alusivos a la composición de la población. Así, si se tratara de una distribución de rentas, podrían utilizarse columnas de monedas, de diferente altura según la frecuencia de cada modalidad representada. En el ejemplo que hemos dispuesto, filas de mujeres, en silueta, de mayor o menor longitud, constituyen el pictograma de la distribución planteada, referente al empleo femenino.

Dibujamos a continuación los diagramas del ejemplo utilizado, lo que nos libera de cualquiera otra descripción.

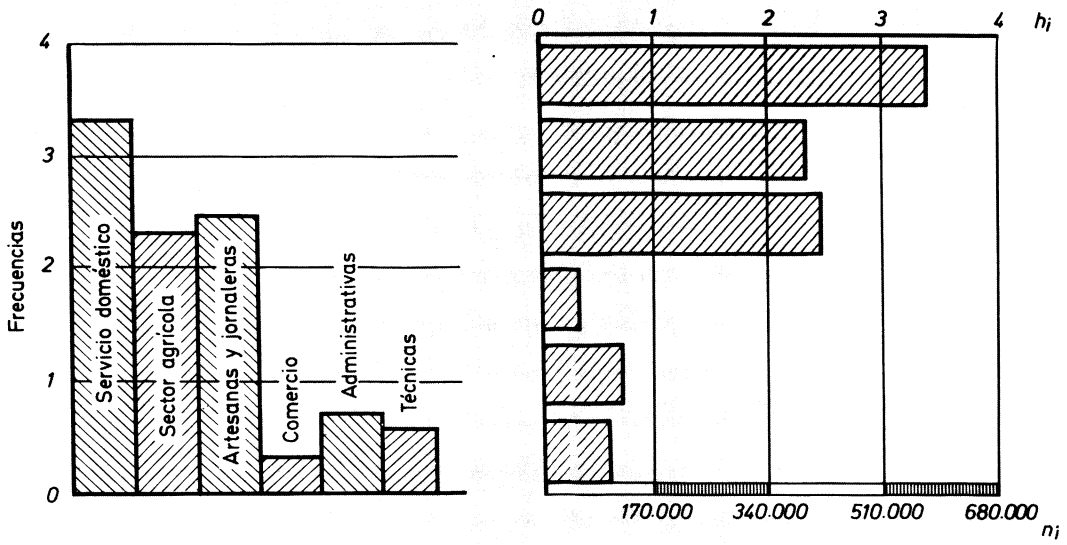


FIG. 5.10.

Otras representaciones gráficas de estas variables estadísticas cualitativas son los *cartogramas*. Resultan muy adecuados cuando el atributo es referible a individuos cuya esencia es que integran sintópicamente * la población; tal

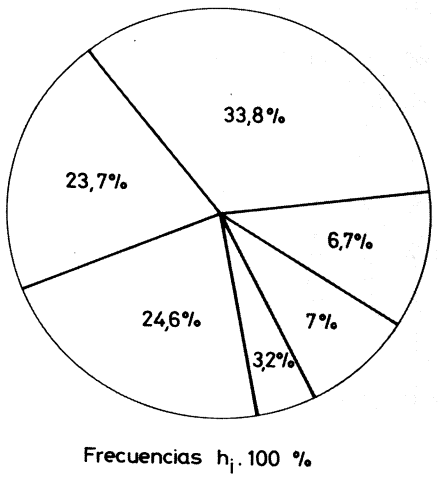


FIG. 5.11.

* Geográficamente; en lugares determinados.

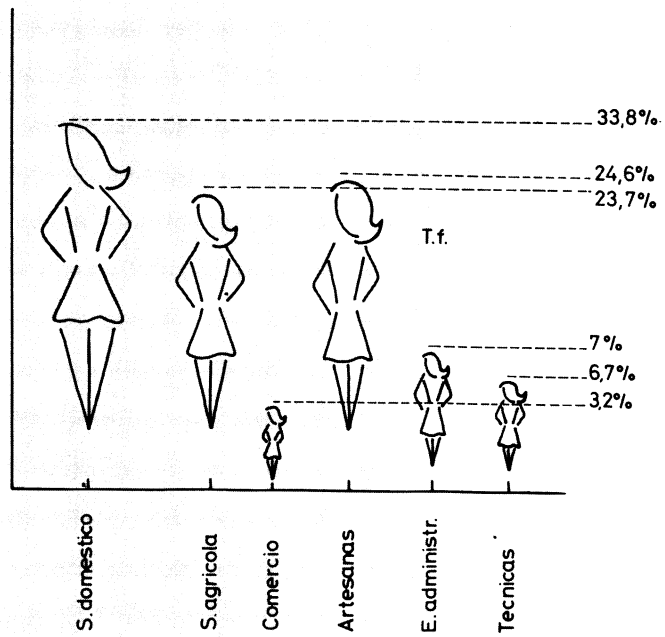


FIG. 5.12.

sucede con el ejemplo 29, referente al carácter «matrícula universitaria», que en la figura 5.13 se plasma gráficamente sobre las provincias españolas, según su frecuencia, en diferentes fondos o rayados.

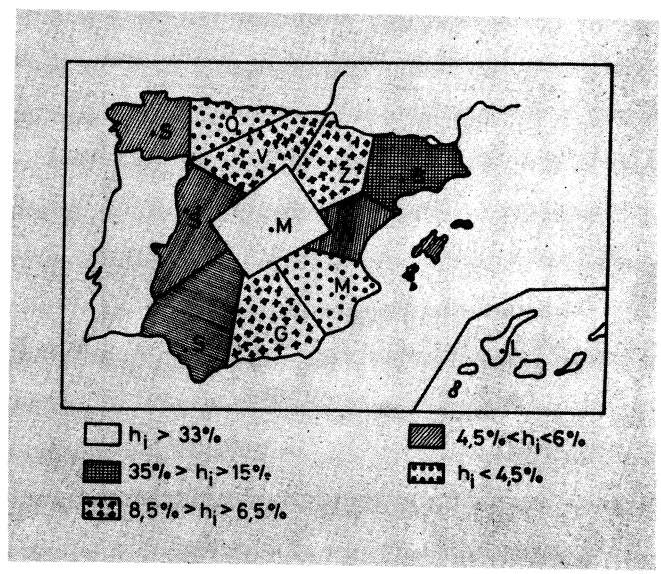


FIG. 5.13.

Ejemplo 29

Matrícula universitaria, por distritos. Curso 1966-67.
(Fuente: Secretaría General Técnica del Ministerio de Educación y Ciencia.)

(No se incluyen las universidades no estatales)

Distrito	*Matrícula*		
(X)	(n_i)	(h_i)	$(h_i \cdot 100\,\%)$
Barcelona	13 665	0,136	13,6
Granada	8 492	0,084	8,4
La Laguna	1 423	0,014	1,4
Madrid	35 975	0,356	35,6
Murcia	2 088	0,020	2,0
Oviedo	3 139	0,032	3,2
Salamanca	5 780	0,057	5,7
Santiago	5 004	0,049	4,9
Sevilla	5 886	0,058	5,8
Valencia	5 967	0,059	5,9
Valladolid	7 126	0,070	7,0
Zaragoza	6 580	0,065	6,5
	$\Sigma n_i = 101\,125$	$\Sigma h_i = 1$	$\Sigma h_i \cdot 100 = 100$

Finalmente, para terminar este epígrafe, hagamos referencia a las llamadas *series cronológicas,* que son distribuciones de frecuencias de variable estadística cualitativa, cuyo atributo es, precisamente, el tiempo-calendario, y sus diversas rúbricas o modalidades son los de fecha. El ejemplo que se ofrece a continuación es una serie cronológica.

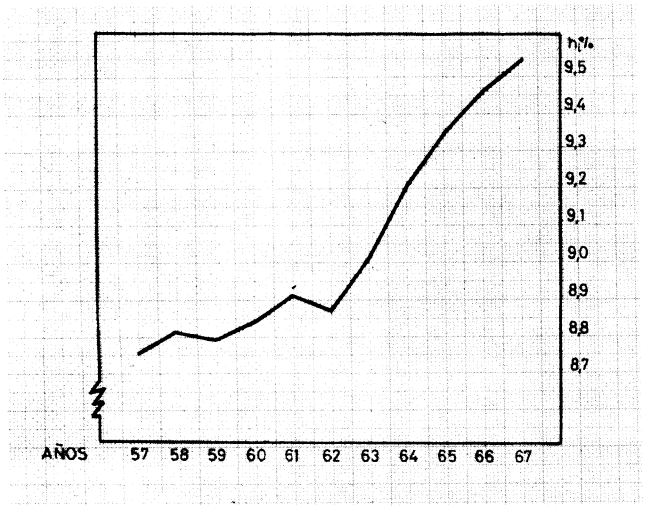


FIG. 5.14.

Ejemplo 30

Crecimiento de la población española en edad de escolaridad obligatoria. (Fuente: Instituto Nacional de Estadística.)

Año (X)	*Población de seis a trece años* (n_i)	(h_i)
1957	4 242 321	0,0874
1958	4 266 734	0,0880
1959	4 265 562	0,0878
1960	4 287 821	0,0883
1961	4 315 891	0,0890
1962	4 300 500	0,0886
1963	4 356 957	0,0900
1964	4 449 372	0.0920
1965	4 534 297	0,0934
1966	4 584 972	0,0945
1967	4 624 959	0,0953
	$\Sigma n_i = 48\ 529\ 386$	$\Sigma h_i = \sim 1$

4. VARIABLES CUANTITATIVAS: TABLAS Y GRAFICOS

Variación discreta

Las tablas de distribución de frecuencias para una variable estadística cuantitativa discreta en nada se diferencian de la forma típica de las de variables cualitativas (pág. 360), excepto en que aquí, tratándose de una variable cuantitativa, la columna de las x_i estará ocupada, en lugar de con los nombres de las diversas rúbricas del atributo, con los valores numéricos que toma la variable.

Por lo que se refiere a la representación, la más adecuada para este caso es un diagrama de ordenadas o de barras, pudiéndose usar también los llamados «diagramas de puntos».

El ejemplo que a continuación ofrecemos concreta lo que se viene diciendo, y nos libera de más amplias descripciones.

Ejemplo 31

Asignando un punto a cada uno de los diez ítems de una prueba objetiva, realizada por ochenta alumnos, las calificaciones obtenidas han sido las siguientes:

0	3	7	4	6	3	5	6	0	7	2	0	5	8	9	6
3	10	7	4	3	8	0	4	8	0	2	10	2	7	8	1
4	8	9	8	8	5	6	6	4	0	6	0	6	6	6	7
8	6	3	5	6	1	8	2	8	6	5	4	2	7	7	2
9	6	6	9	7	2	6	9	6	5	8	4	6	1	4	5

La tabla de frecuencias, que incluye el contaje o recuento de las mismas, es:

Calificación (x_i)	*Recuento*	n_i	h_i
0	𝍸 //	7	0,087
1	///	3	0,038
2	𝍸 //	7	0,087
3	𝍸	5	0,062
4	𝍸 ///	8	0,100
5	𝍸 //	7	0,087
6	𝍸 𝍸 𝍸 //	17	0,215
7	𝍸 ///	8	0,100
8	𝍸 𝍸 /	11	0,137
9	𝍸	5	0,062
10	//	2	0,025
		$\Sigma n_i = 80$	$\Sigma h_i = 1$

FIG. 5.15.

He aquí sus diagramas de ordenadas y de puntos:

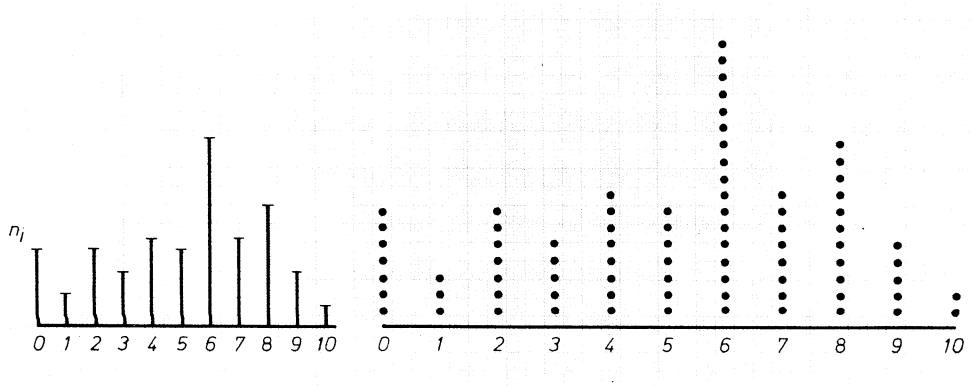


FIG. 5.16.

Variación continua

El caso más frecuente, y también más interesante, es cuando la variable estadística cuantitativa presenta una variación continua, a lo largo de su intervalo de valores.

En estos casos existen dos modos de construir las tablas de distribución de frecuencias:

a) método simple,
b) método de las frecuencias agrupadas.

Método simple. En todo similar al tratamiento que se ha dado a las variables estadísticas cuantitativas discretas, resulta su tabla de disposición idéntica a la de éstas.

En cuanto a sus representaciones gráficas, junto a los diagramas de barras o de puntos, ya expuestos, resulta interesante, en este caso, la construcción del llamado *diagrama acumulativo.* Se dibuja a partir del diagrama de puntos, acumulando a cada ordenada todas las frecuencias anteriores.

Ejemplo 32

El departamento de verificación de una factoría de aparatos eléctricos toma, para control de calidad, cien piezas de un determinado diseño y mide su espesor en milímetros, habiendo resultado los siguientes números:

1,80	1,90	1,93	2,02	2,01	2,00	2,03	2,04	2,08	1,93
1,83	1,91	1,95	1,93	1,99	2,00	2,00	2,07	2,04	2,08
1,83	1,92	1,96	1,95	1,99	1,99	1,98	2,04	2,05	2,09
1,84	1,90	1,95	1,96	2,00	2,02	1,98	2,04	2,07	2,09
1,83	1,92	1,93	1,95	2,01	2,02	2,01	2,05	2,06	2,10
1,86	1,89	1,97	1,93	2,00	2,01	1,98	2,07	2,05	2,11
1,88	1,88	1,97	1,97	2,01	1,99	1,98	2,06	2,06	2,11
1,89	1,93	1,94	1,98	1,99	2,02	1,99	2,05	2,08	2,18
1,91	1,97	1,95	2,02	1,98	1,98	2,02	2,06	2,12	2,22
1,92	1,94	1,96	1,98	2,00	2,01	2,00	2,03	2,12	2,27

El diagrama acumulativo de esta distribución de frecuencias se representa en la figura 5.17.

Método de frecuencias agrupadas. Cuando, como en el ejemplo que antecede, el número de valores que toma la variable es elevado, se usa el método de frecuencias agrupadas, cuya técnica se describe a continuación, usando el mismo ejemplo precedente.

1.º Se determina el intervalo total de variación

$$\left.\begin{array}{l}\text{espesor máximo} = 2{,}27 \text{ mm} \\ \text{espesor mínimo} = 1{,}80 \text{ mm}\end{array}\right\} \; 2{,}27 - 1{,}80 = 0{,}47 \text{ mm}$$

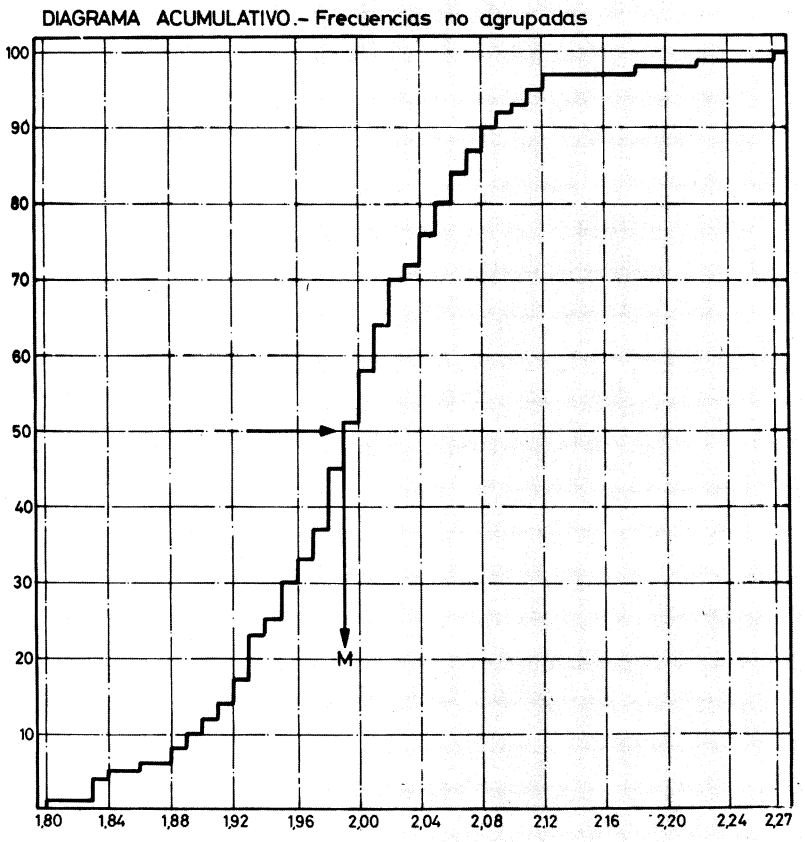


FIG. 5.17.

2.º Se divide este intervalo total en tantas *clases* como se quiera describir la distribución de frecuencias. No existe número idóneo, aunque conviene evitar los extremos: un número pequeño de clases «diluiría» las diferencias y perdería «finura» la distribución; optar por un número excesivamente grande de clases desvirtuaría el método, ya que con él se pretende una simplificación de cálculos. Puede aconsejarse un número discreto entre diez y veinte clases.

$$0{,}47 : 10 = 0{,}047 \text{ mm.}$$

Es obvia la conveniencia de «redondear» el *intervalo de clase* a un número más «operativo»: 0,05 mm.

3.º Es necesario delimitar muy claramente los extremos de cada una de las clases (también llamadas «casillas»), a fin de que no haya ninguna duda al asignar cada dato a su clase correspondiente. Hay dos técnicas para conseguirlo: o bien se especifican los extremos de cada intervalo con una cifra

más de las que dan las observaciones, o bien se utilizan los signos $\leqslant$ y $<$, que abren y cierran, respectivamente, cada intervalo.

En el ejemplo que estamos desarrollando, la primera clase, siendo la mínima observación de 1,80 mm, tendrá como extremos

$$1{,}775 - 1{,}825$$

o bien

$$1{,}77 \leqslant x_1 < 1{,}82.$$

4.º Una vez establecidas las clases (las diez de nuestro ejemplo) han de establecerse las *marcas de clase* de cada una de ellas, que es el valor común que se les asigna a todos los datos comprendidos en la clase correspondiente. Es lógico que su cálculo se haga con la semisuma de extremos.

El polígono acumulativo es muy útil. Si se traza por la abscisa x_i la ordenada que corta al polígono en P, y por P se traza la paralela al eje de abscisas, ésta intercepta, en el eje de ordenadas, un punto A que da la frecuencia n_i o/y h_i de individuos cuyo valor de la variable es menor o igual que x_i.

El *polígono de frecuencias* es la poligonal cuyos vértices son los puntos medios de las bases superiores de los rectángulos del histograma de frecuencias.

Las gráficas que se representan en las figuras 5.18 y 5.19 corresponden al ejemplo que estamos tratando.

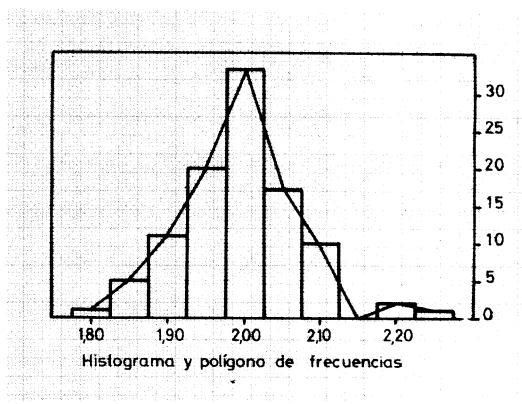


FIG. 5.18.

Así, la marca de clase de x_1 es

$$\frac{1{,}775 + 1{,}825}{2} = 1{,}80.$$

5.º Con los cálculos precedentes se construye la tabla de distribución de frecuencias agrupadas, cuyas siete columnas se describen por sí solas, sobre el ejemplo que se desarrolla.

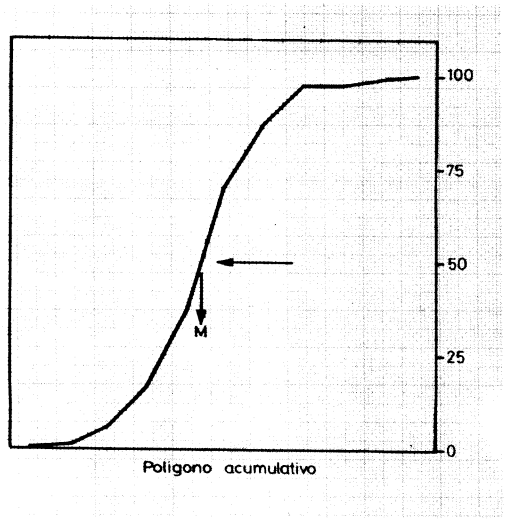


FIG. 5.19.

Clases	*Marcas de clase* (x_i)	*Recuento*	n_i	n_i acumul.	h_i	h_i acumul.
1,775-1,825	1,80	/	1	1	0,01	0,01
1,825-1,875	1,85	////	5	6	0,05	0,06
1,875-1,925	1,90	//// //// /	11	17	0,11	0,17
1,925-1,975	1,95	//// //// //// ////	20	37	0,20	0,37
1,975-2,025	2,00	//// //// //// ///	33	70	0,33	0.70
2,025-2,075	2,05	//// //// //// //	17	87	0,17	0,87
2,075-2,125	2.10	//// ////	10	97	0,10	0,97
2,125-2,175	2,15		0	97	0,00	0,97
2,175-2,225	2,20	//	2	99	0,02	0.99
2,225-2,275	2,25	/	1	100	0,01	1,00

Para representar una distribución de frecuencias agrupadas, son tres los procedimientos:

a) histograma de frecuencias;
b) polígono de frecuencias;
c) polígono acumulativo.

El *histograma de frecuencias* se construye dibujando, sobre cada intervalo de clase, rectángulos de áreas proporcionales a las frecuencias respectivas.

Si los intervalos de clase son iguales, las bases de los rectángulos del histograma también lo son, y entonces sus alturas son proporcionales (iguales) a las frecuencias.

El *polígono acumulativo* se construye de la siguiente manera: dispuestas las clases como en el histograma de frecuencias, sobre el eje horizontal, partiendo del extremo inferior del primer intervalo, con ordenada 0, se une con el otro extremo, a una altura que sea numéricamente igual al área del primer

rectángulo (si los intervalos son iguales, coincide con la altura del rectángulo). Se une ese punto con otro del extremo superior de la segunda clase, cuya ordenada sea numéricamente igual a la suma de las áreas de los dos primeros rectángulos (suma de sus alturas, si se trata de intervalos de igual longitud), y así sucesivamente.

Ejercicio 37

Se facilita el cuadro de observaciones referibles al grado de acidez de cien muestras formadas en serie, de un determinado catalizador.

Establézcase la tabla de frecuencias, agrupadas en diez intervalos.

*p*H

5,40	5,49	5,49	5,52	5,49	5,58	5,64	5,67	5,73	5,76
5,70	5,73	5,76	5,70	5,76	5,67	5,64	5,79	5,91	5,82
5,79	5,85	5,88	5,85	5,79	5,91	5,94	6,06	5,94	5,91
6,06	5,79	5,85	5,85	5,79	5,91	5,92	5,95	5,88	5,88
6,03	5,97	5,97	6,00	6,00	6,03	6,03	5,97	5,94	6,00
6,00	6,00	5,97	6,06	6,06	6,03	5,97	6,06	5,94	6,03
6,00	6,00	5,94	5,94	6,03	5,94	5,94	5,97	6,06	6,00
6,12	6,21	6,12	6,12	6,15	6,21	6,18	6,15	6,12	6,09
6,16	6,12	6,15	6,21	6,18	6,15	6,18	6,24	6,36	6,36
5,79	6,24	6,27	6,27	6,30	6,33	6,33	6,54	6,66	6,81

Ejercicio 38

Dibújense el histograma de frecuencias, el polígono de frecuencias y el polígono acumulativo de la distribución anterior.

5. REDUCCION DE LA INFORMACION: ESTADISTICOS

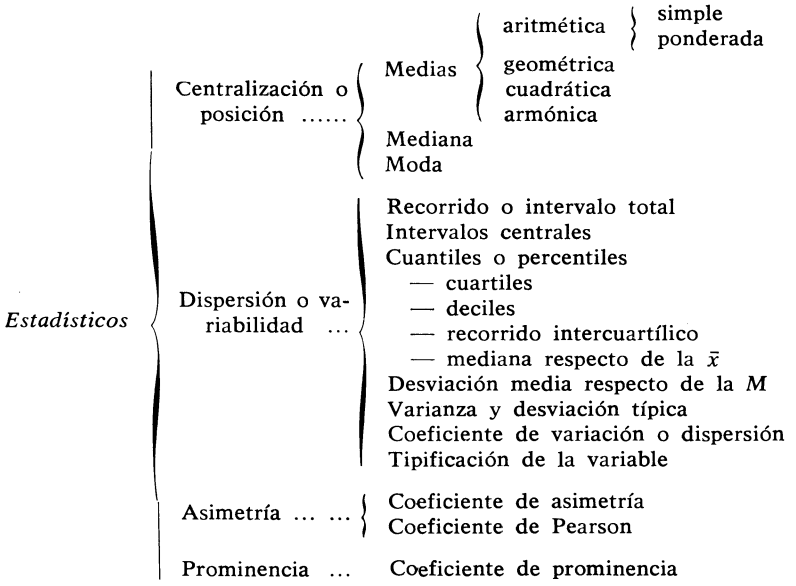
Una vez recogidos, tabulados y representados los datos de la serie estadística, es necesario reducir toda esa información a unos números representativos de la distribución, que reciben el nombre de *características estadísticas* o *estadísticos.*

Ellos permiten, de una forma cuantitativa, al margen de todo subjetivismo, la comparación entre distintas series estadísticas y la valoración, en números, de sus diversas características.

Aunque nosotros sólo desarrollaremos parte de ellos, bueno será —como siempre— tener una visión lo más completa posible del tema que se está estudiando.

Son de cuatro clases estas medidas: los estadísticos de *centralización* suministran los valores centrales o promedios, alrededor de los cuales se agrupan los datos de la serie; los de *dispersión* miden la mayor o menor regularidad de agrupamiento de la serie, sobre las medidas centrales; las medidas de asimetría cuantifican, como su nombre indica, la asimetría de la distribución; por último, se citan los estadísticos de *prominencia,* que son

capaces de comparar, a igualdad de dispersión, la densidad de frecuencias extremas y centrales.



6. ESTADISTICOS DE CENTRALIZACION

Media aritmética

Sea la variable X, que toma los valores x_1, x_2, ..., x_k, con las frecuencias absolutas n_1, n_2, ..., n_k, de modo que el cardinal de la muestra es

$$n_1+n_2+\ldots+n_k=N.$$

Se denomina media aritmética de la distribución al estadístico que define la siguiente fórmula:

$$\bar{x}=\frac{x_1\cdot n_1+x_2\cdot n_2+\ldots+x_k\cdot x_k}{N}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}x_i\cdot n_i. \qquad [1]$$

Si en la expresión [1] se dispone la fracción completa en suma de fracciones simples de denominador común N, resulta:

$$\bar{x}=x_1\cdot\frac{n_1}{N}+x_2\cdot\frac{n_2}{N}+\ldots+x_k\cdot\frac{n_k}{N}=x_1h_1+x_2h_2+\ldots+x_kh_k$$

$$\bar{x}=\sum_{i=1}^{k}x_ih_i \qquad [1']$$

expresión de la media, en función de las frecuencias relativas.

Ejemplo 33

La media de la distribución de frecuencias agrupadas del ejemplo 32 es

$$\bar{x}=\frac{1}{100}(1{,}80\times 1+1{,}85\times 5+1{,}90\times 11+\ldots+2{,}25\times 1)=1{,}9945 \text{ mm.}$$

(Más adelante, cuando se haya establecido el concepto de desviación típica, se mostrará la forma práctica de realizar los cálculos de ambos estadísticos con tablas operativas adecuadas.)

A los elementos de un conjunto de valores $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ se les asocian los elementos P_i del conjunto de «ponderación» $N \subset P=\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ y se define, de un modo general, *media aritmética ponderada* de la serie X por la fórmula

$$\bar{x}=\frac{x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n}$$

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_ip_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \qquad [2]$$

Los elementos de P pueden llamarse «pesos o valoraciones» e indican la importancia relativa de cada uno de los elementos de X.

Adviértase que, por tratarse de frecuencias agrupadas, la media aritmética escrita en [1] no es más que una media aritmética ponderada.

Media geométrica

Sobre la distribución de frecuencias de la variable X, de N datos, se establece la media geométrica de la serie, mediante la fórmula

$$\bar{x}_g=\sqrt[N]{x_1\cdot x_2\cdot \ldots \cdot n_n} \qquad [3]$$

o bien,

$$\bar{x}_g=\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/N} \qquad [3']$$

Presenta dos inconvenientes que la hacen de poco uso: uno, que si un dato es nulo, resulta 0; otro, que su cálculo suele ser laborioso.

Moda

Moda de una distribución de frecuencias es la marca de la clase (o el valor de la variable, si no están agrupadas las frecuencias) de mayor frecuencia. O sea, el valor de la variable que lo ostenta mayor número de individuos de la muestra.

Se comprende que puede existir más de una moda, en cuyo caso se trata de una *distribución multimodal.*

Ejemplo 34

La moda de la distribución del ejemplo 32 es

$$x_5 = 2{,}00 \text{ mm}$$

con sus $n_5 = 33$ individuos que la ostentan.

Ejercicio 39

Determínese la moda de la distribución de frecuencias del ejercicio 37.

Mediana

Este estadístico de centralización, que también se puede considerar de dispersión o variabilidad, se define como el valor de la variable, M, tal que el 50 por 100 de los individuos de la distribución alcanzan un valor superior a M, y el otro 50 por 100 toman un valor de la variable igual o menor que M.

A) La determinación de la mediana en series discretas o continuas no agrupadas se puede hacer analítica o gráficamente:

A-1) Analíticamente:

Basta ordenar la serie de menor a mayor valor de x_i y detectar el término central, que será la mediana (si existieran dos términos centrales, la mediana es la media aritmética de ellos).

Ejemplo 35

Dispuestas las cien medidas del ejemplo 32, de menor a mayor, la que ocupa el quincuagésimo lugar es 1,99 mm; luego la mediana de esa serie continua de frecuencias no agrupadas es

$$M = 1{,}99 \text{ mm.}$$

Ejercicio 40

Determínese la frecuencia de los datos, sin agrupar, del ejercicio 37.

A-2) Gráficamente:

Es suficiente, para determinar la mediana de este modo, trazar sobre el diagrama acumulativo la recta $y=0{,}5$, que cortará en un punto al diagrama, cuya abscisa es el valor de la mediana.

Ejemplo 36

En el diagrama acumulativo de la figura 5.19 se determina así la mediana.

Ejercicio 41

Sobre el diagrama acumulativo del ejercicio 38 *márquese el valor de la mediana de esa distribución.*

B) Si se trata de series de frecuencias agrupadas, el método gráfico-analítico para su determinación produce la siguiente fórmula para el valor de la mediana:

$$M = L_m + \frac{N/2 - \Sigma n}{n_m} \cdot i \qquad [4]$$

en la que

L_m = límite inferior de la clase mediana;
$N/2$ = mitad del número de observaciones;
Σn = número de datos por debajo de la clase mediana;
n_m = datos de la clase mediana;
i = longitud del intervalo.

La deducción de la fórmula [4] es la sencilla aplicación de una semejanza de triángulos que se producen al cortar con $y=0{,}5$ al polígono acumulativo de la distribución (Fig. 5.20).

$$M = L_m + \overline{HI} = L_m + \overline{AF};$$
$$\overline{AF} = \frac{N/2 - \Sigma n}{n_m} \cdot \overline{AE}. \qquad [5]$$

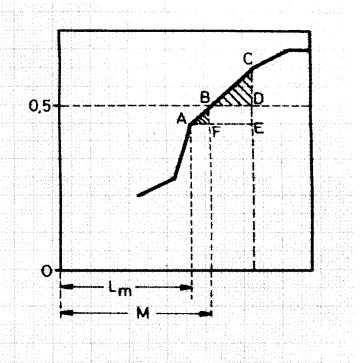


FIG. 5.20.

Ejemplo 37

Para determinar la mediana de la distribución de frecuencias del ejemplo 32, lo primero de todo hay que detectar cuál es la clase mediana. Para ello, basta consultar la columna de frecuencias acumuladas de la tabla de su distribución y observar que la clase $x_4 = 1{,}95$ acumula treinta y siete observaciones hasta ella, y que la clase $x_5 = 2{,}00$ alcanza setenta observaciones inferiores o iguales a ella.

Como $N = 100$ y $70 > N/2$, es claro que la mediana ha de buscarse en ese quinto intervalo.

$$\begin{aligned} L_m &= 1{,}975 \\ n &= 37 \\ n_m &= 33 \\ i &= 0{,}05 \end{aligned} \qquad M = 1{,}975 + \frac{50 - 37}{33} \cdot 0{,}05 = 1{,}995 \text{ mm.}$$

Ejercicio 42

Determínese la mediana de la distribución de frecuencias agrupadas del ejercicio 37.

7. ESTADISTICOS DE DISPERSION

Recorrido o intervalo total

El intervalo total de una distribución de frecuencias es la diferencia entre los valores extremos que toma la variable.

Es un estadístico de consideración inevitable, pero de muy pobre información: un solo valor extremadamente desviado (por pequeño o por grande) de la distribución «alargaría» el intervalo total en una longitud que podría inducir a error, al inferir conclusiones.

Ejemplo 38

El intervalo de la distribución que venimos analizando es

$$\Delta x = 2{,}27 - 1{,}80 = 0{,}47 \text{ mm.}$$

Ejercicio 43

Establézcase el recorrido de la distribución del ejercicio 37.

Desviación media

Respecto de la media. Este estadístico refleja la dispersión de los valores que toma la variable respecto de la media. Cuanto más y mayores sean las diferencias de las observaciones a la media, más elevada es la desviación media. Se calcula mediante la fórmula:

$$D_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} n_i |x_i - \bar{x}| \qquad [6]$$

o bien

$$D_m = \sum_{i=1}^{k} h_i |x_i - \bar{x}|. \qquad [6']$$

Respecto de la mediana. La desviación media respecto de la mediana indica análoga variabilidad de dispersión que la anterior, pero aquí, referible a la mediana. Su fórmula es

$$D_m = \sum_{i=1}^{k} h_i |x_i - M|. \qquad [7]$$

Varianza; desviación típica; momentos

La desviación típica, σ, y su cuadrado, σ^2, la varianza, son —con mucho— los estadísticos más útiles para medir la dispersión de una distribución.

Las fórmulas que siguen establecen los dos conceptos.

Varianza

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 n_i}{N} \qquad [8]$$

o bien,

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} h_i (x_i - \bar{x})^2 \qquad [8']$$

Desviación típica

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 n_i}{N}} \qquad [9]$$

o en frecuencias relativas

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} h_i (x_i - \bar{x})^2} \qquad [9']$$

Un sencillo cálculo permite transformar la fórmula [9'] en una más fácil de manejar, que es ésta

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} h_i x_i^2 - \bar{x}^2}} \quad ,$$

fórmula de la desviación típica en función del momento de segundo orden *.

Ejemplo 39

Como se prometió en la página 373, a continuación se ofrecen las tablas operativas y cálculos de la media y de la desviación típica de la distribución que nos vienen sirviendo para concretar.

La tabla, junto a algunas de las columnas descriptivas con que aparecía en la página 370, se aumenta con otras nuevas de carácter operativo, cuyas cabeceras indican los cálculos a que se refieren.

Entiéndase que, por ser más cómodo operar enteros que decimales, para calcular, por ejemplo, $\sum_{i=1}^{k} h_i x_i^2$, lo que se hace es calcular $\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2$, dividiendo después por N.

x_i	n_i	$n_i x_i$	x_i^2	$n_i x_i^2$
1,80	1	1,80	3,24	3,24
1,85	5	9,25	3,43	17,15
1,90	11	20,90	3,61	39,71
1,95	20	39,00	3,80	76,00
2,00	33	66,00	4,00	132,00
2,05	17	34,85	4,20	71,40
2,10	10	21,00	4,41	44,10
2,15	0	0	0	0
2,20	2	4,40	4,84	9,68
2,25	1	2,25	5,06	5,08
		$\Sigma n_i x_i = 199{,}45$		$\Sigma n_i x_i^2 = 398{,}34$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{N} = 1{,}9995 \text{ mm}$$

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} h_i x_i^2 - \bar{x}^2} =$$

$$= \sqrt{3{,}9834 - 3{,}9780}$$

$$\sigma = 0{,}074 \text{ mm}$$

Ejercicio 44

Realícense sobre la distribución del ejercicio 37 *la tabulación y cálculo análogos a los realizados en el ejemplo* 39.

* Denominada así, porque las expresiones del tipo $\sum_{i=1}^{k} h_i x_i^n$ se denominan momentos de orden n.

Existen medios abreviados de cálculo de estos números estadísticos que, mediante un cambio de variable, permite manejar números enteros de pequeño valor absoluto, en lugar de los engorrosos decimales que se tabulan.

Si parece oportuno avanzar en esta línea, puede encontrarse su desarrollo en nuestra obra *Cerca de la Matemática - 1.*

8. PRIMERA IDEA DE LA CORRELACION

Dependencia funcional y aleatoria: variables estadísticas bidimensionales

Sea una masa de gas ideal que va tomando distintos estados, en condiciones isotermas, es decir, manteniendo constante su temperatura: $dT=0$.

A medida que se varía la presión (p), el volumen (V) de esa masa de gas adquiere diferentes valores, obedeciendo a la conocida ley de Boyle-Mariotte, que exige que

$$p \cdot V = k \text{ (constante)} \qquad [10]$$

Existe una rigurosa *dependencia funcional* o analítica entre las dos variables de estado, p y V: fijada una presión p_1, la masa de gas, experimentada isotérmicamente, ocupa «necesariamente» un determinado volumen V_1; si es p_2 la presión, entonces su volumen será un número fijo, V_2, de modo que

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 = k \text{ (constante)};$$

y, en general,

$$p_i \cdot V_i = k.$$

Si se disponen unos ejes cartesianos para representar el fenómeno, registrando presiones en abscisas y volúmenes en ordenadas, cada estado isotermo de la masa de gas experimentada vendrá representado por un punto del plano: por el punto (p_i, V_i). Se consigue así una bien conocida línea: una rama de hipérbola equilátera, que es la representación gráfica de la función analítica $p \cdot V = k$, en la que sus variables presentan *dependencia funcional.*

p	V
p_1	V_1
p_2	V_2
⋮	⋮
p_i	V_i

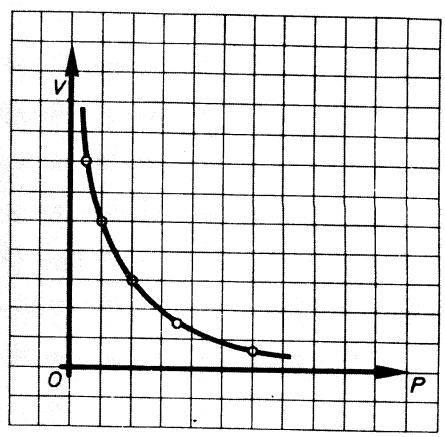


FIG. 5.21.

Existen en la Naturaleza multitud de fenómenos, de todo tipo, que no admiten el tratamiento matemático anterior, pero que vienen fijados por dos variables, de alguna manera dependientes entre sí. Tal sería el caso, por ejemplo, de las alturas alcanzadas por plantas de maíz, en función del tiempo de su germinación. Ciertamente, cuantas más semanas hayan transcurrido desde su nacimiento, más altura alcanzará el tallo; pero lo que no sucede es que, dado un determinado tiempo t_i, a partir del momento de su germinación, exista una altura perfectamente fija y determinada que le corresponda, a_i.

Claro es que el tiempo y la altura dependerán de alguna manera entre sí, pero con una dependencia mucho menos «robusta» que la funcional; se dice que presentan una *dependencia aleatoria.*

Por analogía con el lenguaje analítico, establecemos la función aleatoria

$$f(t) = a$$

y diremos que se trata de una *variable estadística bidimensional.*

En las distribuciones estadísticas de variables bidimensionales, cada individuo de la muestra viene caracterizado por un par de números, que son los valores que toman las dos variables, en cada caso.

El modo más simple de representación de una distribución estadística bidimensional viene sugerido por la representación cartesiana de las funciones analíticas. Como allí, se disponen unos ejes de coordenadas ortogonales y sobre el eje de abscisas se representan los valores de una de las variables, y sobre el de ordenadas, los de la otra. De este modo, cada individuo de la muestra queda representado por un punto del plano cartesiano.

Esta manera de representación recibe el nombre de *nube de puntos* o *diagrama de dispersión.*

De un modo intuitivo, y en espera de mayor precisión, cabe observar ahora que si la nube de puntos se constriñe mucho y éstos aparecen agrupados alrededor de una posible línea representativa, es señal de que la dependencia aleatoria entre las dos variables estadísticas es bastante fuerte; mientras que si el diagrama de puntos resulta ser muy disperso, y de ninguna manera sugiere una posible línea representativa del fenómeno, ello es debido a que la depen-

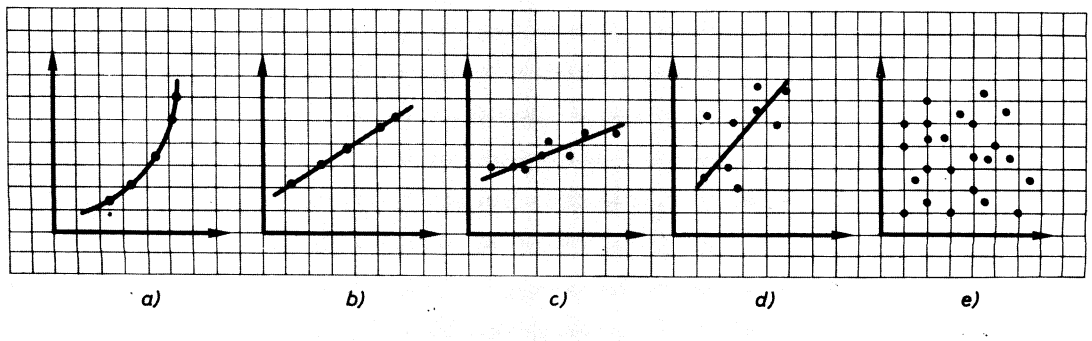


FIG. 5.22.

dencia entre las dos variables estadísticas representadas es muy débil. Como casos extremos, entiéndase que si la nube de puntos cubre todo el plano, en dispersión total, la presunta dependencia aleatoria no existe; y que, si por el contrario, al representar una distribución estadística bivariante, se obtiene un diagrama de puntos, formado por todos los que están sobre una determinada línea, la dependencia deja de ser aleatoria para ser funcional.

Los ejemplos que siguen esquematizan los conceptos precedentes.

Ejemplo 40

Sobre muestras imaginarias bidimensionales,

dependencia funcional { parabólica (*a*) / lineal (*b*)

dependencia aleatoria { fuerte (*c*) / débil (*d*)

independencia aleatoria (*e*).

Regresión. Regresión lineal

La mayor o menor dependencia aleatoria entre los caracteres de una variable estadística bivariante se pone de manifiesto porque, al realizar su diagrama de puntos, aparecen éstos más o menos localizados en una determinada zona, que puede recordar una línea matemática de algún tipo: recta, parábola, hipérbola, etc. Pues bien; cuando en una muestra bivariante sucede que «aproximadamente» uno de los caracteres se puede considerar función del otro y, consecuentemente, la distribución puede quedar razonablemente representada por una determinada función matemática, se dice que existe *regresión* de los valores de uno de los caracteres respecto de los del otro.

A la línea que representa la distribución se la llama *línea de regresión*, y claro es que se podrá hablar de regresión lineal, hiperbólica, parabólica, etc., según sea la línea que represente la distribución.

No existe razón lingüística para tal nombre. El motivo es, simplemente, histórico. En 1886, GALTON publicaba un trabajo estadístico sobre la talla de los padres y la de la generación filial. Observó que, ciertamente, a padres altos correspondían hijos, también, de elevada estatura y que padres de poca talla tenían, en general, hijos bajos. Pero, a la vez, se dio cuenta de que la estatura de los hijos, aun con las rúbricas apuntadas, tendía a «regresar» a la media de la raza; o sea, que padres altos engendraban hijos altos, pero menos que ellos; y que padres de poca talla tenían hijos bajos, pero más altos que ellos. Todo indicaba como si la estatura de la generación filial «regresara» a la talla media de la población.

El término «regresión estadística» con que GALTON publicara su trabajo se ha generalizado, y hoy, sin sentido lingüístico alguno, se aplica a todo tipo de estudio de esta clase.

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 5.3

31. $p(5) = 1/6$.

32. *a)* variable estadística cuantitativa;
b) variable estadística cuantitativa;
c) variable estadística cualitativa dicotómica;
d) variable estadística cualitativa dicotómica;
e) variable estadística cualitativa con tres rúbricas: alga, hongo, liquen.

33. Es discreta, porque sólo se pueden dar los seis resultados de sus caras. No tiene sentido el resultado 3,5.

34. Sí, porque sus diversos resultados se diferencian de unidad en unidad.

35. Porque el ensayo de rotura es destructivo; si se analizase toda la población de piezas, se destruiría la producción.

36. $$(x+2)^4 = \sum_{n=0}^{k} \binom{4}{n} x^{4-n} \cdot 2^n =$$

$$= \binom{4}{0} x^4 + \binom{4}{1} x^3 \cdot 2 + \binom{4}{2} x^2 2^2 + \binom{4}{3} x \cdot 2^3 + \binom{4}{4} 2^4.$$

37. **38.** **39.** **40.** **41.** **42.** **43.** **44.**

Constituyen la descripción completa de la muestra que se facilita en el primero de ellos.
Aprovéchese el paralelismo de cálculo que suministran los ejemplos números 32 a 39, ambos inclusive.

5.4

Ejercicios y problemas de recapitulación

1. Establézcase la probabilidad de que al lanzar dos dados sobre la mesa se obtenga de suma once puntos.
2. Determínese la probabilidad de que al levantar una ficha de dominó, sea un doble.
3. Calcúlese la probabilidad de que al lanzar dos dados se obtenga la misma puntuación en cada uno de ellos.
4. En una lotería de quinientos números se conceden 25 premios. ¿Qué probabilidad tiene un jugador que ha comprado diez números de que le toque algún premio?
5. La media aritmética de los veinte primeros datos de una serie es 12, y la de los treinta siguientes es 16. ¿Cuál es la media de toda la serie?
6. Las temperaturas medias mensuales de una ciudad interior con clima continental extremado han sido, en un determinado año, las siguientes:

   $-2°,\ -1°,\ -0{,}5°,\ 8°,\ 10°,\ 22°,\ 30°,\ 34°,\ 28°,\ 15°,\ -3°,\ -4°$

   Determínense la media anual y sus estadísticos de dispersión.
7. ¿Qué probabilidad hay de encontrar un número múltiplo de 3, entre todos los que se pueden formar de tres cifras distintas con los guarismos 1, 2, 3, 4 y 5?
8. Con los guarismos 1, 2, 3 y 4 se forman todos los números posibles de cuatro cifras distintas. ¿Qué probabilidad hay de tomar, al azar, uno que sea múltiplo de 11?
9. Determínese la probabilidad de obtener trío de ases al tomar tres cartas de una baraja de cincuenta y dos.
10. ¿Qué probabilidad hay de que, al lanzar un dado sobre la mesa, puedan leerse 2, 3, 4 y 5 puntos?

11. Determínese la probabilidad de que al lanzar un dado sobre la mesa, la suma de puntos de todas las caras visibles sea 18.

12. En una caja se tienen cinco bolas, numeradas con los cinco primeros números naturales. Se pide:

a) probabilidad de que, al extraer dos bolas, sean de la misma paridad;
b) probabilidad de que, al sacar dos bolas, sean de distinta paridad;
c) probabilidad de que al realizar diez extracciones sucesivas de dos bolas, devolviendo cada vez las extraídas, resulten alternativamente de igual y distinta paridad;
d) probabilidad de que, habiendo sacado y devuelto una primera bola, una segunda extracción proporcione una bola marcada con un número superior que la primera.

13. De una baraja de cincuenta y dos cartas se extraen, de una vez, cinco naipes. ¿Qué probabilidad hay de que se hayan conseguido tres reyes y una pareja (dos cartas iguales)?

14. Una bolsa contiene diez bolas blancas y seis negras. Se extraen simultáneamente dos bolas. ¿Qué probabilidad existe de que sean del mismo color? ¿Y cuál de que sean de distinto?

15. Del archivo de los permisos de tráfico que contiene todas las licencias de turismos de la ciudad *A*, comprendidos entre la matrícula A-0000-K y A-9999-L, ¿qué probabilidad hay de extraer una licencia cuyo número esté comprendido entre 1 000 y 2 000, ambos inclusive?

16. ¿Cuál tiene mayor probabilidad de ganar, un jugador que juega a que salga siete u otro que apuesta a que salga diez, como suma de puntos al tirar dos dados?

17. Hállese la probabilidad de conseguir tres caras, al tirar diez veces una moneda homogénea, al aire.

18. Calcúlese la probabilidad de obtener, al menos, tres caras al lanzar al aire una moneda homogénea, diez veces.

19. Admitiendo que el engendrar hijos varones o hembras son sucesos equiprobables, ¿qué probabilidad existe de encontrar entre todas las familias con seis hijos, una que tenga cuatro varones?

20. Continuando el problema anterior, ¿cuál es la probabilidad de encontrar, al azar, una de esas familias que tenga, al menos, cuatro varones?

5.5

Autoevaluación A-5

1. Para que un suceso sea contrario de otro

a) es suficiente que sean incompatibles;
b) es suficiente que recubran el muestral;
c) es necesario que se puedan dar simultáneamente;
d) es necesario que sean incompatibles.

2. Se sabe que los sucesos A y B son incompatibles. Sólo una de las cuatro expresiones propuestas es correcta. Márquela.

a) $A \cup B = H$;
b) $A \cap B = \phi$;
c) $A \subset B$;
d) $B \subset A$.

3. Si un muestral tiene cinco sucesos elementales, el número de sucesos que ha de considerarse en su categoría de pruebas es

a) cinco;
b) cinco y el vacío;
c) treinta y dos sucesos;
d) treinta y dos y el suceso imposible.

4. La intersección de dos sucesos produce el suceso imposible. Por eso se puede asegurar que

a) son contrarios;
b) son opuestos;
c) son incompatibles;
d) no pueden dar el vacío.

5. La reunión de dos sucesos produce el suceso seguro, lo que quiere decir que

a) son compatibles;
b) su intersección no es vacía;
c) son contrarios;
d) nada se puede inferir, salvo lo que afirma el enunciado.

6. La probabilidad de un suceso A es 0,8, y la de otro B es el doble de la de A. Entonces.

a) el suceso B es más seguro que el A;
b) se han hecho doble número de pruebas;
c) no es posible el dato de B;
d) el suceso A claramente está incluido en el B.

7. El contrario del contrario del suceso seguro,

a) es el imposible;
b) él mismo;
c) el universal;
d) el vacío.

8. Sean $p(A)=1/3$ y $p(B)=1/2$. Si es correcto escribir $p(A \cup B)=5/6$, es porque:

a) A y B son sucesos de la misma categoría de pruebas;
b) A y B son sucesos independientes;
c) A y B son sucesos incompatibles;
d) es que su suma da el muestral.

9. Siendo $p(A)=0{,}2$ y $p(B)=0{,}3$, si $p(A \cap B)=0{,}06$ es correcto, es porque:

a) A y B son sucesos independientes;
b) A y B son sucesos incompatibles;
c) A no está incluido en B;
d) B no está incluido en A.

10. ¿Cuál es la *frecuencia* de conseguir cinco puntos al tirar un dado?:

a) 1/6;
b) 5/6
c) no tiene sentido la pregunta;
d) depende del número de tiradas.

11. ¿Cuál es la mayor *probabilidad,* la de sacar cinco puntos, al tirar un dado cien veces, o sacar esos puntos tirando mil veces?

a) mayor, si se tira mil veces;
b) no tiene sentido la pregunta;
c) menor, si se tira cien veces;
d) hay que tirar indefinidamente.

12. Muestra es:

a) un subconjunto de la población;
b) una población estadística aleatoria;
c) un conjunto de datos;
d) un subconjunto de la población, representativo y aleatorio.

13. La suma de frecuencias relativas de una distribución es:

a) igual al número de individuos;
b) la unidad;
c) Σn_i;
d) $\frac{1}{N}\Sigma h_i$.

14. La suma de frecuencias absolutas de una distribución es igual a

a) N;
b) Σh_i;
c) 100;
d) $h_i \cdot N$.

15. La mediana de una distribución es 1,81, y hay treinta y siete datos menores o iguales que ese número. Por eso se puede asegurar que el cardinal de la muestra tratada es:

a) $1{,}61 \times 100 = 161$;
b) 37;
c) 74;
d) $37 \times 1{,}81$.

16. En una distribución, la moda es 0,87 mm, y ese valor lo ostentan treinta y cuatro individuos. Si hay sesenta y ocho individuos que ostentan la mitad de esa altura, se puede asegurar que:

a) la media es menor de 0,87;
b) no es posible;
c) la mediana está a la izquierda de la media;
d) la moda es la mitad de la media.

17. La desviación típica de una distribución mide:

a) la centralización de la población;
b) la dispersión de la distribución;
c) la asimetría del conjunto;
d) la mayor o menor extensión de la muestra.

18. En una distribución completamente simétrica, la diferencia entre la moda y la media es:

a) la mediana;
b) la desviación típica;
c) cero;
d) el 50 por 100.

19. Si se suman todas las desviaciones de cada valor de la variable a la media, se obtiene:

a) la mediana;
b) la desviación típica;
c) cien;
d) cero.

20. Si la nube de puntos de un diagrama de dispersión se extiende por todo el plano, es señal de que:

a) la dependencia es funcional;
b) la dependencia es aleatoria;
c) las variables son independientes entre sí;
d) la correlación es pequeña.

21. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer cinco bolas de una bolsa en la que hay trece bolas blancas y siete negras, sean tres blancas?

22. ¿Qué probabilidad hay de conseguir siete caras, primero, y tres cruces después, al tirar diez veces una moneda homogénea, al aire?

23. Determínese la probabilidad de obtener, al menos, diez puntos, al levantar una ficha de dominó.

24. Hállese la probabilidad de que, al lanzar dos dados, se obtenga una suma de puntos mayor que siete y múltiplo de dos.

25. En una exposición canina de cincuenta perros, treinta son de raza *A* y cuarenta tienen el pelo liso. ¿Qué probabilidad hay de encontrar un par de perros, vecinos de exposición, ambos de la raza *A* o ambos con el pelo liso?

FICHA-CLAVE DE LA AUTOEVALUACION A-5

1. *d).*	**6.** *c).*	**11.** *b).*	**16.** *b).*
2. *b).*	**7.** *b)*	**12.** *d).*	**17.** *b).*
3. *c).*	**8.** *c).*	**13.** *b).*	**18.** *c).*
4. *c).*	**9.** *a).*	**14.** *a).*	**19.** *d).*
5. *d).*	**10.** *c).*	**15.** *c).*	**20.** *c).*

21. $p = 0{,}4$.

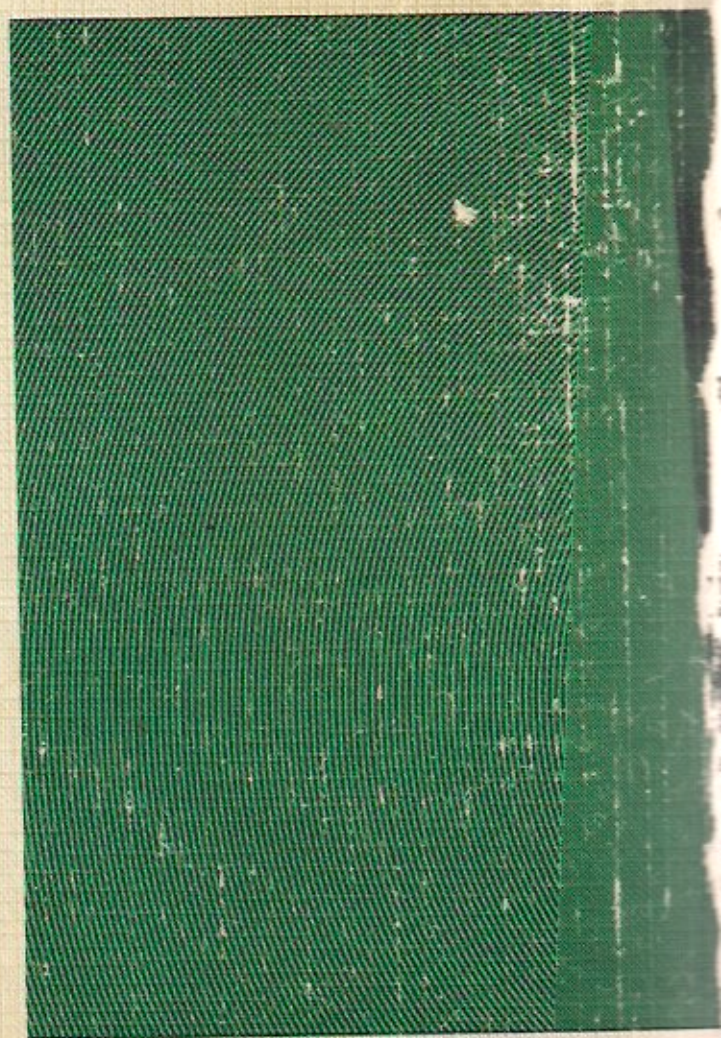
22. $p = 1/1\,024$.

23. $p = 1/7$.

24. $p = 0{,}25$.

25. $p = 0{,}83$.

Alhambra



Autorizado por el Ministerio de Educación y Ciencia, para su utilización en el primer curso del Bachillerato, por Orden del 4-5-1976. («B.O.E.» del 19-7-1976.)